现代应用数学丛书

有限变位弹性论
变形几何学

〔日〕山本善之 近藤一夫 著

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

有限变位弹性論
变形几何学

〔日〕山本善之
近藤一夫 著
刘亦珩 譯
錢端壮 校

上海科学技术出版社

內容提要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。內容包括两部分，都是应用几何学的观点来論述彈塑性力学理論。

第一部分是有限变位彈性論，共分三章，第一章用几何学观点讲述了連續体的变形状态和平衡条件，第二章为彈性体力学，包括应力应变关系、协调条件、稳定条件及压屈性质，第三章重点介紹平板問題。

第二部分是变形几何学，分不完全結晶的宏观几何学、不协調彈性論和塑性力学三章。

本书可供高等学校数学和力学专业师生及工程技术人員参考。

现代应用数学丛书

有限变位彈性論

变形几何学

原书名　有限変位の彈性論
　　　　変形の幾何学
原著者　〔日〕山本善之
　　　　　　　近藤一夫
原出版者　岩波书店
譯者　刘亦珩
校者　錢端壮

*

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出033号
新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售
商务印书館上海厂印刷

*

开本850×1168 1/32　印張2 30/32　字数66,000
1961年11月第1版　1961年11月第1次印刷
印数 1—16,000

統一书号：13119·427
定　价：（十四）0.56元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其内容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对内容的处理，为了尽可能地減少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书内容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文内过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

序

本书的內容是用几何学的觀点来讲述有限变位的彈性体力学，并且考察由变位的有限性所引出的一些特性（彈性体是具有三維延展的連續体，張量这个名詞起源于張力，彈性体或者一般連續体的力学都和几何有密切关系，所以在讲述这些力学时，本质上有必要作几何学的考察）。

在第1章里，对連續体的变形状态进行了几何学的探討，从而导出了平衡条件。第2章导入应力应变关系，說明平衡及稳定的一般性质，叙述协調条件。由于不穩定現象是有限变位的特性，所以当作最切近的例子詳細討論了压屈。第3章将以上結果应用到平板。

山本善之

序

本书所讲述的主要是著者数年来考虑过的东西。但关于第1章的一部分，最近在英国及德国也有类似的研究結果发表；第3章的屈服理論至今还沒有看到有人作同样研究，因此，把这些材料放在本讲座内，或許早了一些。其詳細情况，請参看

Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Sciences by means of Geometry, vol. I, Division D（及 Division C 的一部分）❶。

近藤一夫

❶ 东京，1955，学术文献普及会发行，本文末的文献表内簡称为 Memoirs I.

目　录

出版說明

有限变位彈性論

序
第1章　变形与平衡条件 ……1
§1　变形与应变 ……1
§2　綫素，面素，体素 ……6
§3　应力与平衡条件 ……10
§4　特殊情形的基础方程 ……15
第2章　彈性体力学 ……21
§5　彈性能与应力应变关系 ……21
§6　余应力与协調条件 ……26
§7　关于平衡的定理与稳定条件 ……30
§8　压屈 ……34
第3章　平板 ……39
§9　平板的变形与平衡条件 ……39
§10　平板的压屈 ……43
参考书及文献 ……47

变形几何学

序
第1章　不完全結晶的宏观几何学 ……49
§1　近似的結晶連續体 ……49
§2　解放到自然状态，非完整坐标 ……50
§3　錯位張量 ……51
§4　拟平行性，撓率及 Riemann-Christoffel 曲率 ……54
§5　与錯位論的对应 ……56
§6　度量缺陷与 Riemann-Christoffel 曲率 ……58

第2章 不协調彈性論 ……61
§7 协調条件 ……61
§8 不协調度 ……64
§9 大域的不协調 ……66
第3章 塑性力学 ……68
§10 由平板压屈理論到屈服理論的类推 ……68
§11 Euler–Schouten 曲率 ……70
§12 塑性变形能 ……71
§13 場的方程与边界条件 ……74
§14 屈服条件 ……76
§15 各向同性 ……77
参考书及文献 ……80
校后記 ……82

第1章 变形与平衡条件

§1 变形与应变

1. 变形与基准状态

連同所考慮的物体一起，对于我們存在着一个現实的 Euclid 空間，命之为 R。为了記述所考慮的物体的变形，在空間 R 内导入适当的右手直交坐标系 (X)，並且將它固定起来。对于坐标系 (X) 的坐标写成

$$x^1,\ x^2,\ x^3;\ 或者\ x^\lambda(\lambda=1,\ 2,\ 3);\ 或者\ x^i(i=1,\ 2,\ 3).$$

当所考慮的物体变形时，將适当选取的某一个状态作为标准，称之为**基准状态**。在基准状态下物体並不需要保持平衡，但是为了思考明确，可以假設状态变化是十分緩慢地发生的，卽不妨將各瞬間的物体都看作保持着靜平衡状态。对于动力学的情形，若不考慮慣性力的作用，这里得到的結果仍然成立。

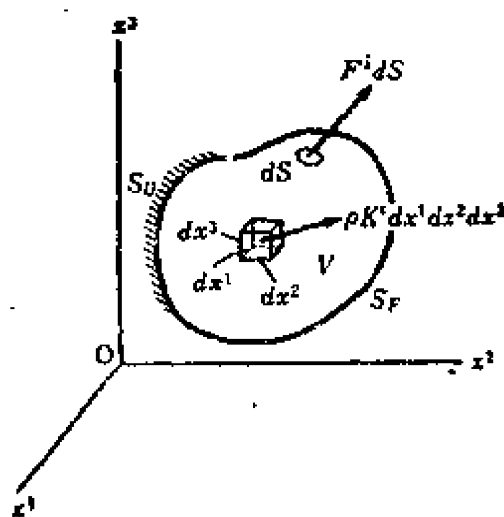


图1.1 基准状态 C

在基准状态 C，設物体內部占有空間 R 的区域为 V，V 的表面是 S。又在物体各点的每个单位质量都作用着体力(body force)K^i，它在 x^1, x^2, x^3 軸方向的分量各为 K^1, K^2, K^3；在表面 S 的部分 S_F 上，对于这个状态的每个单位面积作用着表面力 (surface traction) $\mathfrak{F}^i=F^i$；而在表面的其余部分 S_U，物体固着在固定于空間 R 里的一个剛壁上。在基

准状态 C，物体在这些作用下保持着平衡。

将基准状态 C 的“物体各点”的坐标 x^i 看作各点的标記，叫作“物体点 x^i”。将作用在物体点 x^i 近傍的体力或表面力都看作 x^i 的函数，分别記作 $K^i(x)$ 及 $\mathfrak{F}^i(x)$。

設在时刻 $t=0$ 时，物体处于基准状态。并且由外界加于物体的作用随着时間而变化，物体也随之而变形。設在时刻 t 的变形状态为 $C^*(t)$，叫作“状态 $C^*(t)$”。在状态 $C^*(t)$，物体点 x^i 就是占有坐标为 $x^{*\lambda}(x, t)$ 的点。当然有 $x^{*\lambda}(x, 0)=x^\lambda$，这时，

$$x^{*i}(x, t)-x^i=u^{*i}(x, t) \tag{1.1}$$

叫作状态 $C^*(t)$ 的物体点的变位 (displacement)。

在状态 $C^*(t)$，設物体內部占有区域 $V^*(t)$，基准状态下在 S_F 及 S_U 上的物体点移动到 $S_F^*(t)$ 及 $S_U^*(t)$，则 $S_F^*(t)$ 及 $S_U^*(t)$ 全体将和 $V^*(t)$ 的表面 $S^*(t)$ 一致。此时，在物体內部的物体点 x^i 的近傍，对于每一单位质量作用着体力 $K^{*i}(x, t)$；在 $S_F^*(t)$ 上物体点 x^i 的近傍，对于该瞬間的每个单位面积作用着表面力 $F^{*i}(x, t)$；并設 $S_U^*(t)$ 上的物体点 x^i，受了强制的变位 $v^*(x, t)$，使物体保持平衡。显然有

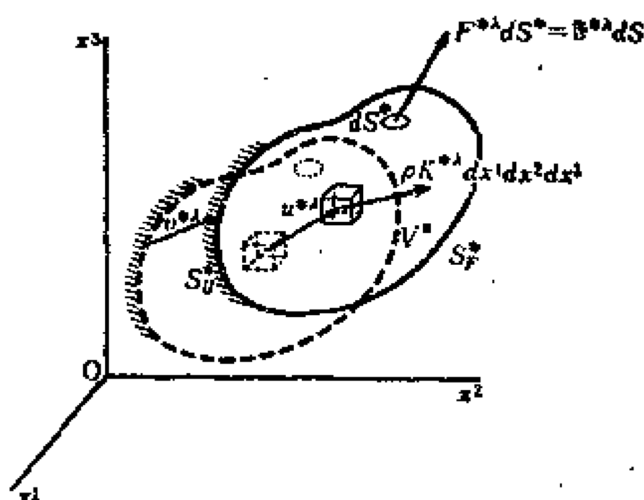


图1.2　状态 C^*

$$\left.\begin{aligned} &K^{*i}(x, 0)=K^i(x), \\ &F^{*i}(x, 0)=F^i(x)=\mathfrak{F}^i(x), \\ &v^{*i}(x, 0)=0. \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

在不丧失一般性的原則下，可假定变位 $u^{*i}(x, t)$ 对于 t 是連續的，对于 x^i 也是連續的，而且分区地二阶可微。又在基准状态 C 的 S_U

上的物体点 x^i 叫作 S_U 上的物体点，对于它恒成立着如下的条件：

$$u^{*i}(x, t) = v^{*i}(x, t). \tag{1.3}$$

2. Lagrange 方法与 Euler 方法

将任意时間 $t=t^*$ 固定起来，并对状态 $C^*=C^*(t^*)$ 进行考察。为了簡单起見，命

$$x^{*\lambda}(x, t^*) = x^{*\lambda}(x), \quad V^*(t^*) = V^*. \tag{1.4}$$

一般可設

$$\det\left|\frac{\partial x^{*\lambda}(x)}{\partial x^i}\right| = \frac{\partial(x^{*1}(x), x^{*2}(x), x^{*3}(x))}{\partial(x^1, x^2, x^3)} \equiv D^*(x) \neq 0. \tag{1.5}$$

由此条件，将

$$x^{*\lambda} = x^{*\lambda}(x) \equiv x^\lambda + u^{*\lambda}(x) \tag{1.6}$$

对 x^i 解出，可写成 $x^i = x^i(x^*)$。这就是，V^* 及 S^* 上点的坐标 $x^{*\lambda}$，与状态 C^* 时占有該点的物体点在基准状态的坐标間有一对一的对应关系。根据这种对应，可以在閉区域 V^*+S^* 里导入这样的曲綫坐标系 (L)，使各物体点具有和它們的标記相同的坐标。同样的对于各瞬間状态也可导入这样的曲綫坐标系，使物体点 x^i 对于該曲綫坐标系 (L) 的坐标是它的标記 x^i。仿照流体力学情形，将这样的坐标系叫作 **Lagrange 坐标系或 L 系**；与此相反，将空間的固定坐标系叫作 **Euler 坐标系或 E 系**。在基准状态，L 系和 E 系一致。

就物体点在基准状态所占的点来进行考察的方法叫作 **Lagrange 方法**。也就是說，对坐标系 (X)，命各物体点的标記等于 L 系的坐标，而进行考察。将作用于物体的外作用或者由外作用所生的变形等物理量看作几何物，利用 Lagrange 方法作成它們的表現时，这些表現叫作 **L 表現**。相邻二物体点 x^i 及 x^i+dx^i 間在基准状态的距离 ds 由下式給出：

$$(ds)^2 = dx^i dx^i = \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases} \tag{1.7}$$

在此 δ_{ij} 是 Kronecker 的 δ，并且利用了 Einstein 的总和规約，即在同一項內同一标数出現两次时，就对該标数作总和。由(1.7)可知，物理量的 L 表現关于坐标系(X)的基本張量是 δ_{ij}。对于空間 R 里任意坐标变換 $(X)\to(Y)$，若 L 表現按照張量律变化时，就叫作"L 張量"。

就物体点在所考慮时間內占有的位置作考察的方法叫作 **Euler 方法**。用这个方法所得的物理量的表現叫作 E 表現。相邻二点 $x^{*\lambda}$ 及 $x^{*\lambda}+dx^{*\lambda}$ 間的距离 ds^*，用以前同样的形式給出：

$$(ds^*)^2 = dx^{*\lambda} dx^{*\lambda} = \delta_{\lambda\mu} dx^{*\lambda} dx^{*\mu} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3), \tag{1.8}$$

所以对于 E 表現的坐标系(X)的基本張量是 $\delta_{\lambda\mu}$。若对于坐标变換$(X)\to(Y)$，E 表現按照張量律变化时就叫作"E 張量"。若利用(1.6)所表示的坐标变換$(X)\to(L)$，求出作为 E 張量的某一 E 表現关于坐标系 (L) 的分量，而且它恰为 L 張量的一个物理量的 L 表現时，就将它簡称为"張量"。此时，反过来立即可以从 L 表現求出 E 表現。一般情况，E 張量的 E 表現对于坐标系(L)的分量不能成为 L 張量的 L 表現。

将物理量的表現附以星标*，就表明該量是处在状态 C^* 下。拉丁字母标数表示对于 L 系的分量，希腊字母标数表示对于 E 系的分量。对于变位来說，写成 $u^{*i}(x)$ 时就看作变位的 L 表現；若将它看作 $x^{*\lambda}$ 的函数而写成 $u^{*\lambda}=u^{*\lambda}(x(x^*))$ 时，就得到变位的 E 表現。u^{*i} 及 $u^{*\lambda}$ 虽各是 L 向量及 E 向量，而 u^{*i} 却不是 $u^{*\lambda}$ 对于坐标系(L)的分量。

3. 应变

由基准状态 C 变到状态 C^* 时，我們考慮物体点 x^i 近傍的变形状态，也就是表現应变的量。这个量用相邻二点 x^i 及 x^i+dx^i 間

的距离变化来表示。它們在基准状态 C 的距离 ds 用 (1.7) 表示，它們在状态 C^* 所占有点間的距离 ds^* 可由(1.8)給出如下：

$$(ds^*)^2=(x^{*k}_{,i}dx^i)(x^{*k}_{,j}dx^j)=g^*_{ij}(x)dx^idx^j$$
$$(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3). \tag{1.9}$$

在此 $$g^*_{ij}(x)=x^{*k}_{,j}x^{*k}_{,i}=(\delta_{ki}+u^*_{k,i})(\delta_{kj}+u^*_{k,j}). \tag{1.10}$$

逗号后的拉丁字母标数表示对应 L 系坐标的微分，例如

$$x^{*k}_{,i}=\frac{\partial x^{*k}}{\partial x^i}. \tag{1.11}$$

由此可知，应变可用对于坐标系(L)的基本張量的变化量来表示，它的一半叫作"应变張量"，記为 $\varepsilon^*_{ij}(x)$，即

$$\varepsilon^*_{ij}(x)=\frac{1}{2}(g^*_{ij}(x)-\delta_{ij})=\frac{1}{2}(u^*_{i,j}+u^*_{j,i})+\frac{1}{2}u^*_{k,i}u^*_{k,j}. \tag{1.12}$$

这是应变的 L 表現，可見对于标数 i 及 j 是对称張量。按照前边說过的張量变換律虽可求出应变的 E 表現，但它却沒有任何物理意义。在工程学上将 ε^*_{11}，…，$2\varepsilon^*_{12}=2\varepsilon^*_{21}$，…叫作**应变分量**。

4. 变位与应变的变分

設已給 S_U 上的物体点的变位是 $u^{*i}(x)$，考虑一切可能的变形过程。此时若命物体点 x^i 的变位为 $u^{*i}(x)+\delta u^{*i}(x,\ \tau)$，且設

$$\delta u^{*i}(x,\ t^*)=0,\quad \delta u^{*i}(x,\ \tau)=0\ \ (\text{对于 } S_U \text{ 上的 } x^i), \tag{1.13}$$

則称 $\delta u^{*i}(x,\ \tau)\equiv\delta u^{*i}(x)=\delta u^*_i(x)$ 为"可取变位变分"。对应于变位 $u^{*\lambda}(x)+\delta u^{*\lambda}(x,\ \tau)$ 的应变張量 $\varepsilon^{**}_{ij}(x,\ \tau)$ 可写成

$$\varepsilon^{**}_{ij}(x,\ \tau)=\varepsilon^*_{ij}(x)+\delta\varepsilon^*_{ij}(x,\ \tau)+\frac{1}{2}\delta u^*_{k,i}(x)\delta u^*_{k,j}(x). \tag{1.14}$$

这个表达式里关于 δu^{*i} 的一次項是 $\delta\varepsilon^*_{ij}(x,\ \tau)$、所以給出

$$\left.\begin{aligned}\delta\varepsilon^*_{ij}(x,\ \tau)\equiv\delta\varepsilon^*_{ij}(x)&=\frac{1}{2}(x^{*k}_{,i}\delta u^{*k}_{,j}+x^{*k}_{,j}\delta u^{*k}_{,i})\\&=\frac{\partial x^{*\lambda}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{*\mu}}{\partial x^j}\delta e^*_{\lambda\mu},\\\delta e^*_{\lambda\mu}&=\frac{1}{2}(\delta u^*_{\lambda,\mu}+\delta u^*_{\mu,\lambda}).\end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

在此，逗号后的希腊字母标数表示对应的E系坐标的微分，例如

$$\delta u^*_{\lambda,\mu}=\frac{\partial\delta u^*_\lambda(x(x^*))}{\partial x^{*\mu}}.\tag{1.16}$$

$\delta e^*_{ij}(x,\tau)$ 是"应变变分张量"的 L 表現；$\delta e^*_{\lambda\mu}$ 是它的 E 表現。

§2 綫素，面素，体素

考虑基准状态 C 的情形。在物体內給定有向曲綫，在其上取曲綫正向重合于其增加方向的适当坐标 α^1，命对应于 α^1 的点关于坐标系(X)的坐标为 $x^i(\alpha^1)$，并决定 α^1 使 $\dfrac{\partial x^i(\alpha^1)}{\partial\alpha^1}\neq 0$。若已知曲綫上一点 α^1 到点 $\alpha^1+d\alpha^1$ 的微小綫素，則对应地可給出表現：

$$dx^i=\frac{\partial x^i(\alpha^1)}{\partial\alpha^1}\,d\alpha^1 \text{ 及 } dO_{ij}=\frac{1}{1!}\,\varepsilon_{ijk}\,dx^k.\tag{2.1}$$

在此 ε_{ijk} 叫作 Eddington 的 ε，它在数組 (ijk) 是 (123) 的偶排列时取值 1，奇排列时取值 -1，其余情形都为 0。这些表現 dx^i，dO_{ij} 显然是完全同等的。若命該綫素的长为 ds，其正向单位切綫为 t^i，則显然有

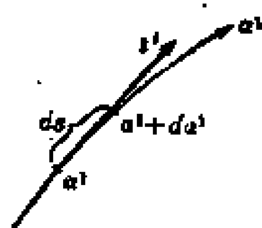


图 2.1 綫素 $dx^i=t^i\,ds$

$$dx^i=t^i ds.\tag{2.2}$$

在給定物体內一块体积时，命其上的坐标 $(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)$ 是右手系的。設点 $(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)$ 关于坐标系(X)的坐标是 $x^i(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)$，那末 $\dfrac{\partial(x^i,x^j,x^k)}{\partial(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)}$ 将不为 0。于是在这块体积上体素可看作以点 $(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)$，$(\alpha^1+d\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)$，…，$(\alpha^1+d\alpha^1,\alpha^2+d\alpha^2,\alpha^3+d\alpha^3)$ 为頂点的微小六面体，由此給出表現

$$\left.\begin{aligned} &dx^{ijk}=\frac{\partial(x^i,x^j,x^k)}{\partial(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)}\,d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^2\\ \text{及}\quad &\\ &dO=\frac{1}{3!}\,\varepsilon_{ijk}\,dx^{ijk}.\end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

若命該体素的体积是 dV，显然有

$$dO = dx^{123} = dV. \tag{2.4}$$

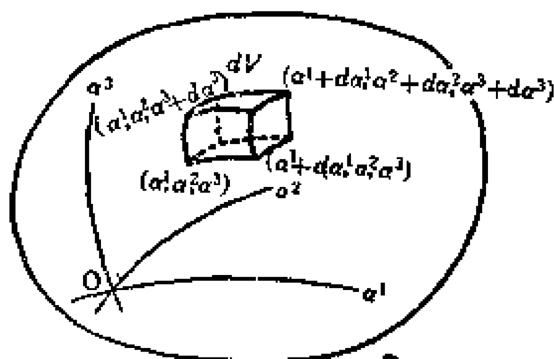


图 2.2　体素 $dO = dV$

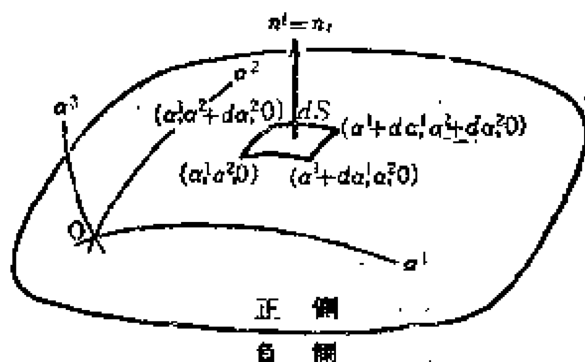


图 2.3　面素 $dO_i = n_i dS$

現在来考虑在物体內部的有向曲面。取含有这个曲面的一块体积，在其內取定右手系坐标 $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$，使所考虑的曲面和 $\alpha^3 = 0$ 一致，而且其正負側也和 α^3 的正負一致。設曲面上的点 $(\alpha^1, \alpha^2, 0)$ 关于坐标系 (X) 的坐标为 $x^i(\alpha^1, \alpha^2)$，那末 $\dfrac{\partial(x^i, x^j)}{\partial(\alpha^1, \alpha^2)}$ 将不为 0。在这个曲面上，以 $(\alpha^1, \alpha^2, 0)$，$(\alpha^1 + d\alpha^1, \alpha^2, 0)$，$(\alpha^1, \alpha^2 + d\alpha^2, 0)$，$(\alpha^1 + d\alpha^1, \alpha^2 + d\alpha^2, 0)$ 四点为頂点的微小四边形所給出的面素的表現是

$$\left.\begin{aligned} dx^{ij} &= \frac{\partial(x^i, x^j)}{\partial(\alpha^1, \alpha^2)}\, d\alpha^1 d\alpha^2 \\ &\text{及} \\ dO_i &= \frac{1}{2!}\, e_{ijk}\, dx^{jk}. \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

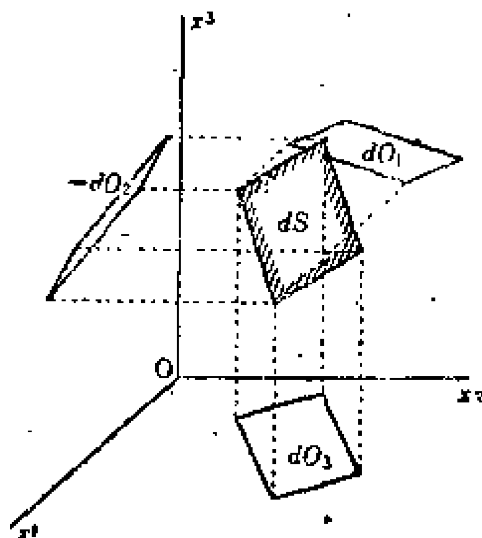


图 2.4　面素 dO_i

命其面积为 dS，由負側到正側的单位法綫为 $n^i = n_i$ 时，就可証明

$$dO_i = n_i dS, \tag{2.6}$$

其証明如下：取所考虑的面素作底面，且以点 $(\alpha^1, \alpha^2, 0)$，$(\alpha^2, \alpha^2, d\alpha^3)$ 所定綫素 dx^i 为一条棱作体素 dO，就容易知道

$$
\begin{aligned}
dO &= \frac{1}{3!}\ \varepsilon_{ijk}\ \frac{\partial(x^i, x^j, x^k)}{\partial(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)}\, d\alpha^1\, d\alpha^2\, d\alpha^3 \\
&= \frac{1}{2!}\ \varepsilon_{ijk}\ \frac{\partial(x^i, x^j)}{\partial(\alpha^1, \alpha^2)}\, d\alpha^1\, d\alpha^2\ \frac{\partial x^k}{\partial \alpha^3}\, d\alpha^3 \\
&= dO_k\, dx^k = dO_k\, t^k\, ds \\
&= dV = n_k\, t^k\, dS\, ds,
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

所以(2.6)成立。由(2.6)可知，dO_i 的各分量等于考虑到面积的方向时，在各坐标面上的投影的面积。

設在基准状态給出的綫、面及体上所取的坐标分别是 α^1; α^1, α^2; α^1, α^2, α^3，在变形过程里它們和物体点的对应是可以保存的，那末相应于在基准状态中所考虑的綫素等要素，也可以考虑在状态 C^* 里所对应的要素。作为状态 C^* 里的要素的 L 表現，可以用該要素在基准状态里的表現(2.1)，(2.5)，(2.3)給出。至于它們的 E 表現，乃是将(2.1)，(2.5)，(2.3)的 $x^i(\alpha^1)$ 等各代以 $x^{*\lambda}(x(\alpha^1))$ 而得到的，即是

$$
dx^{*\lambda} = \frac{\partial x^{*\lambda}(x(\alpha^1))}{\partial \alpha^1}\, d\alpha^1, \qquad dO^*_{\lambda\mu} = \frac{1}{1!}\ \varepsilon_{\lambda\mu\nu} dx^{*\nu}; \tag{2.8}
$$

$$
dx^{*\lambda\mu} = \frac{\partial(x^{*\lambda}, x^{*\mu})}{\partial(\alpha^1, \alpha^2)}\, d\alpha^1 d\alpha^2, \qquad dO^*_{\lambda} = \frac{1}{2!}\ \varepsilon_{\lambda\mu\nu} dx^{*\mu\nu}; \tag{2.9}
$$

$$
dx^{*\lambda\mu\nu} = \frac{\partial(x^{*\lambda}, x^{*\mu}, x^{*\nu})}{\partial(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)}\, d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3,
$$

$$
dO^* = \frac{1}{3!}\ \varepsilon_{\lambda\mu\nu}\, dx^{*\lambda\mu\nu}. \tag{2.10}
$$

对于这些表現，成立着和(2.2)，(2.4)，(2.6)相对应的关系式

$$
dx^{*\lambda} = t^{*\lambda} ds^*, \quad dO^* = dx^{*123} = dV^*, \quad dO^*_{\lambda} = n^*_{\lambda} dS. \tag{2.11}
$$

在此可知，E 单位向量 $t^{*\lambda}$，n^*_{λ} 分别表示状态 C^* 里綫素的切綫及面素的法綫；又 E 数量 ds^*，dV^*，dS^* 分别表示状态 C^* 里的綫素長、体素体积及面素面积。由(2.11)容易了解要素表現各分量的意义和 L 表現一样。不过对于 L 表現所出現的是 t^i 及 n_i 都是 L

向量, ds, dV, dS 都是 L 数量。

在要素的 L 表現与 E 表現間有如下关系。对于綫素及体素有

$$dx^{*\lambda}=\frac{\partial x^{*\lambda}}{\partial\alpha^l}d\alpha^l=\frac{\partial x^{*\lambda}}{\partial x^i}dx^i, \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} dO^*=dV^*=dx^{*123}&=\frac{\partial(x^{*1},x^{*2},x^{*3})}{\partial(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)}d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3\\ &=D^*dx^{123}=D^*dV=D^*dO。\end{aligned} \tag{2.13}$$

由此可知, $dx^{*\lambda}$ 是逆变向量, dO^* 是 -1 权的数量密度。对于面素,和以前一样,考虑以它为底的体素时,由(2.7),(2.13)有

$$dO^*=dO^*_\lambda dx^{*\lambda}=dO^*_\lambda\frac{\partial x^{*\lambda}}{\partial x^i}dx^i=D^*dO=D^*dO_i dx^i,$$

而得关系式

$$dO^*_\lambda\frac{\partial x^{*\lambda}}{\partial x^i}=D^*dO_i。 \tag{2.14}$$

于是 dO^*_λ 是 -1 权的协变向量密度。

更由(1.10),(1.12),(1.5)得

$$\begin{aligned} g^*(x)&\equiv\det|g^*_{ij}(x)|=\det|\delta_{ij}+2\varepsilon^*_{ij}(x)|\\ &=\left(\det\left|\frac{\partial x^{*\lambda}}{\partial x^i}\right|\right)^2=(D^*)^2。\end{aligned} \tag{2.15}$$

由此給出体积应变 $\varkappa^*(x)$:

$$\varkappa^*(x)\equiv\frac{dV^*}{dV}-1=D^*(x)-1=\sqrt{g^*(x)}-1。 \tag{2.16}$$

$\varkappa^*(x)$ 是一个数量。

若設基准状态 C 及状态 C^* 的物体点 x^i 近傍的密度分别为 $\rho(x)$ 及 $\rho^*(x)$,而质量是不随变形而改变的,所以

$$\rho dV=\rho^*dV^*。 \tag{2.17}$$

在此利用(2.16),得

$$(\varkappa^*+1)\rho^*=\rho \quad 或 \quad \sqrt{g^*}\rho^*=\rho。 \tag{2.18}$$

ρ 及 ρ^* 是密度的 L 表現及 E 表現,各为 L 数量及 E 数量。

最后叙述表示綫积分和面积分，以及面积分和体积分之間关系的 **Stokse 积分定理**❶，并以今后常用的形状表示。考虑有向曲面 X_{II}，命其周界是 ∂X_{II}，而且对其正向規定如下：立在 X_{II} 的正側并沿着 ∂X_{II} 的正向繞行时，曲面恒在左手側。設 φ_i 是曲面及其周界上的連續可微函数，則

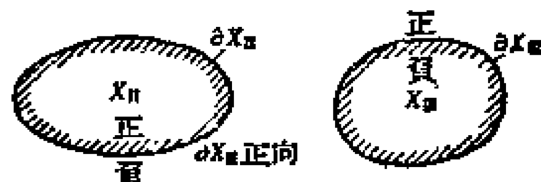


图 2.5 曲面 X_{II} 及体积 X_{III}

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{1!}\int_{\partial X_{II}} \varphi_i\, dx^i &= \frac{1}{2!}\iint\limits_{X_{II}} \varphi_{[i,j]}\, dx^{ij}, \\ \varphi_{[i,j]} &= \frac{1}{2}(\varphi_{i,j}-\varphi_{j,i}). \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

再考慮体积 X_{III}，命其周界为 ∂X_{III}，并設空間不含有 X_{III} 的那一部分是它的正側。若 φ^i 是体积及其周界上的連續可微函数，則有

$$\iint\limits_{\partial X_{III}} \varphi^i\, dO_i = \iiint\limits_{X_{III}} \varphi^i_{,i}\, dO. \tag{2.20}$$

§3 应力与平衡条件

1. 应力

考慮在状态 C^* 保持平衡的物体。在物体內設想有一个有向部分面 X^*_{II}，在面两側的物体部分通过面 X^*_{II} 互相有力作用着，这个力叫作**应力**。設通过部分面上的面素 dO^*_λ，正側物体对負側物体作用着力，这个力可表示为逆变向量 $df^{*\lambda}$。由此定义一权逆变張量密度 $Z^{*\lambda\mu}$：

$$df^{*\lambda} = Z^{*\lambda\mu}\, dO^*_\mu. \tag{3.1}$$

命其关于坐标系 (L) 的分量为 $\mathfrak{S}^{*ij}$，則有

---

❶ J. A. Schouten: Tensor Analysis for Physicists (Clarendon Press, Oxford, 1951).

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{*\lambda}} df^{*\lambda} = \mathfrak{Z}^{*ij} dO_j, \quad \frac{\partial x^{*\lambda}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{*\mu}}{\partial x^j} \mathfrak{Z}^{*ij} = D^* Z^{*\lambda\mu}. \qquad (3.2)$$

在此，$Z^{*\lambda\mu}$ 及 $\mathfrak{Z}^{*ij}$ 是应力的 E 表現及 L 表現，叫作"应力張量密度"。对于 R 的直交坐标系 (X)，其分量各与 $Z^{*\lambda\mu}$ 及 $\mathfrak{Z}^{*ij}$ 一致的 E 协变張量或 L 协变張量可看作应力的 E 表現 $T^{*\lambda\mu}$ 及 L 表現 σ^{*ij}，对于它們显然有关系式

$$T^{*\lambda\mu} = Z^{*\lambda\mu}, \quad df^{*\lambda} = T^{*\lambda\mu} dO^*_\mu, \qquad (3.3)$$

$$\sigma^{*ij} = \mathfrak{Z}^{*ij}, \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^{*\lambda}} df^{*\lambda} = \sigma^{*ij} dO_j, \quad \frac{\partial x^{*\lambda}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{*\mu}}{\partial x^j} \sigma^{*ij} = D^* T^{*\lambda\mu}. \qquad (3.4)$$

$T^{*\lambda\mu}$ 及 σ^{*ij} 各叫作"E 应力張量"及"L 应力張量"。

由(3.3)及(3.4)可推知 $T^{*\lambda\mu}$ 及 σ^{*ij} 各分量的意义。$T^{*\lambda\mu}$ 是通过所考虑的面素，作用在坐标面 $x^\mu=0$ 的投影单位面积上的力的分力，这个分力平行于 x^λ 轴。同理，σ^{*ij} 是通过所考虑的面素，作用在基准状态 C 的对应面素在坐标面 $x^j=0$ 的投影单位面积的力，关于所考虑的坐标系 (L) 的 i 分量。显然 $T^{*\lambda\mu}$ 在表现应力方面很便利，但是在以后用彈性理論討論应力应变关系时，却以 σ^{*ij} 比較合适。在工程学上将这个分量叫作"应力分量"。

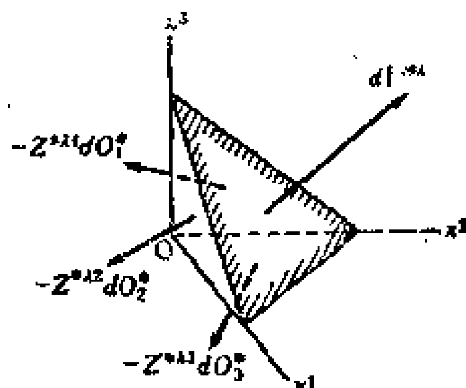


图 3.1 面素 dO_i

体力及表面力的 L 表現名为 $K^{*i}(x)$ 及 $F^{*i}(x)$，它們都可以看成 L 逆变向量。若将这些量写成 $K^{*\lambda}(x(x^*))$ 及 $F^{*\lambda}(x(x^*))$，这就是它們的 E 表現；它們是 E 逆变張量。

2. 用 Euler 方法的平衡条件

用 Euler 方法求状态 C^* 的应力平衡条件。考虑 V^* 里的任意区域 X^*_{III}，求对于其內部的物体所作用的力的平衡条件。在此，

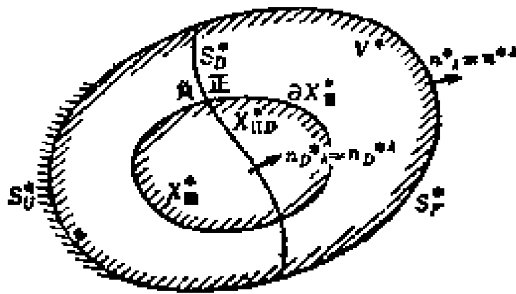


图 3.2 在状态 C^* 的物体

所作用的力仅是在 X^*_{III} 的表面 ∂X^*_{III} 上的应力及 X^*_{III} 内的体力。因为它們在坐标軸方向的合力及在坐标軸周圍的合力矩为零，所以得到如下条件：

$$\left.\begin{aligned}&\iiint\limits_{X^*_{III}}\rho^* K^{*\lambda} dO^* + \iint\limits_{\partial X^*_{III}} T^{*\lambda\mu} dO^*_\mu = 0,\\&\iiint\limits_{X^*_{III}}\rho^*(x^{*\nu}K^{*\lambda} - x^{*\lambda}K^{*\nu})dO^*\\&\qquad + \iint\limits_{\partial X^*_{III}}(x^{*\nu}T^{*\lambda\mu} - x^{*\lambda}T^{*\nu\mu})dO^*_\mu = 0.\end{aligned}\right\}\tag{3.5}$$

一般均假定 $T^{*\lambda\mu}$ 是分区可微的。設应力 $T^{*\lambda\mu}$ 的不連續面是 S^*_D，通常可假設 S^*_D 是有向的。命 S^*_D 含在 X^*_{III} 里的部分是 X^*_{IID}。将 X^*_{III} 适当分割，使 X^*_{IID} 恰好是分割以后所得区域的周界，于是在各区域里 $T^{*\lambda\mu}$，$x^{*\nu}T^{*\lambda\mu}$ 都是連續可微的。所以对于 (3.5) 的面积分适用 Stokes 定理(2.20)，从而这些式子可改写为

$$\left.\begin{aligned}0 = &\iiint\limits_{X^*_{III}-X^*_{IID}} (\rho^* K^{*\lambda} + T^{*\lambda\mu}_{\ ;\mu}) dO^*\\&-\iint\limits_{X^*_{IID}} \mathrm{dif}[T^{*\lambda\mu}] dO^*_\mu,\\0 = &\iiint\limits_{X^*_{III}-X^*_{IID}} \{\rho^*(x^{*\nu}K^{*\lambda} - x^{*\lambda}K^{*\nu})\\&+(x^{*\nu}T^{*\lambda\mu} - x^{*\lambda}T^{*\nu\mu})_{,\mu}\} dO^*\\&-\iint\limits_{X^*_{IID}} \mathrm{dif}[x^{*\nu}T^{*\lambda\mu} - x^{*\lambda}T^{*\nu\mu}] dO^*_\mu\end{aligned}\right\}\tag{3.6}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&= \iiint\limits_{X^*_{III}-X^*_{IID}} \{x^{*\nu}(\rho^* K^{*\lambda} + T^{*\lambda\mu}_{,\mu}) \\
&\quad - x^{*\lambda}(\rho^* K^{*\nu} + T^{*\nu\mu}_{,\mu}) + (T^{*\lambda\nu} - T^{*\nu\lambda})\} dO^* \\
&\quad - \iint\limits_{X^*_{IID}} (x^{*\nu}\operatorname{dif}[T^{*\lambda\mu}] - x^{*\lambda}\operatorname{dif}[T^{*\nu\mu}]) dO^*_\mu.
\end{aligned}\right\}
$$

在此，記号 dif [ ] 表示方括弧里的量是在 S^*_D 正側取的値減去在負側取的値后所得之差。(3.6)在任何区域 X^*_{III} 里都成立，于是求得在 V^* 里的平衡条件为

$$
\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&T^{*\lambda\mu}_{,\mu} + \rho^* K^{*\lambda} = 0, \\
&T^{*\lambda\mu} = T^{*\mu\lambda},
\end{aligned}\right\} \text{在}(V^* - S^*_D)\text{上}, \\
&\operatorname{dif}[T^{*\lambda\mu}] n^*_{D\mu} = 0, \quad \text{在 } S^*_D \text{ 上。}
\end{aligned}\right\}
$$

在此 $n^*_{D\mu}$ 是 S^*_D 上的 E 单位法向量。由(3.3)得 S^*_F 上的平衡条件：

$$
F^{*\lambda} dS^* = T^{*\lambda\mu} dO^*_\mu = T^{*\lambda\mu} n^*_\mu dS^*, \quad \text{在 } S^*_F \text{ 上。}
$$

在此 n^*_μ 是 S^* 的外向 E 单位法向量。由此求得如下条件：

$$
T^{*\lambda\mu} n^*_\mu = F^{*\lambda}, \quad \text{在 } S^*_F \text{ 上。}
$$

由 V^* 里的平衡条件可知，最初就可将 E 应力張量 $T^{*\lambda\mu}$ 看作关于标数 λ 及 μ 对称的張量，命

$$
T^{*\lambda\mu} = T^{*\mu\lambda}. \tag{3.7}
$$

对于这样的 $T^{*\lambda\mu}$ 可得关于 E 系的平衡条件

$$
\left.\begin{aligned}
&T^{*\lambda\mu}_{,\mu} + \rho^* K^{*\lambda} = 0, \quad \text{在}(V^* - S^*_D)\text{上}, \\
&\operatorname{dif}[T^{*\lambda\mu}] n^*_{D\mu} = 0, \quad \text{在 } S^*_D \text{ 上}, \\
&T^{*\lambda\mu} n^*_\mu = F^{*\lambda}, \qquad \text{在 } S^*_F \text{ 上。}
\end{aligned}\right\} \tag{3.8}
$$

这个条件和对应于(1.3)的条件

$$
u^{*\lambda}(x(x^*)) = v^{*\lambda}(x(x^*)), \quad \text{在 } S^*_V \text{ 上} \tag{3.9}
$$

是应用 Euler 方法时的基础方程。

由(3.8)可导出虛功原理。将(3.8)的第一式乘上可取变位变分 $\delta u^*_\lambda(x(x^*))$ 而得到的式子按 $V^* - S^*_D$ 全体作积分，更用 Stokes 定理(2.20)加以变化，得

$$0=\iiint\limits_{V^*-S_D^*}(T^{*\lambda\mu}_{,\mu}+\rho^*K^{*\lambda})\delta u^*_\lambda dO^*$$
$$=\iint\limits_{S^*}T^{*\lambda\mu}\delta u^*_\lambda dO^*_\mu+\iint\limits_{S_D^*}\mathrm{dif}[T^{*\lambda\mu}]\delta u^*_\lambda dO^*_\mu$$
$$-\iiint\limits_{V^*-S_D^*}(T^{*\lambda\mu}\delta u^*_{\lambda,\mu}-\rho^*K^{*\lambda}\delta u^*_\lambda)dO^*.$$

再利用(3.8)的第二和第三式与(1.13)，(1.15)，(3.7)就得到虚功原理：

$$\iiint\limits_{V^*-S_D^*}(T^{*\lambda\mu}\delta e^*_{\lambda\mu}-\rho^*K^{*\lambda}\delta u^*_\lambda)dV^*-\iint\limits_{S_F^*}F^{*\lambda}\delta u^*_\lambda dS^*=0. \quad (3.10)$$

在此，$\delta e^*_{\lambda\mu}$是对应于可取变位变分δu^*_λ的应变变分。

3. 用 Lagrange 方法的平衡条件

虚功原理也可用L表现写出来。設基准状态C的物体，其表面部分S_F的每一单位面积上作用着的表面力，在状态C^*时关于坐标系(X)的x^i軸方向的分量命为$\mathfrak{F}^{*i}$(图1.2)，则有

$$F^{*i}dS^*=\mathfrak{F}^{*i}dS. \quad (3.11)$$

对于(3.10)利用(1.15)，(2.15)，(2.17)，(3.4)，(3.11)，则得虚功原理

$$\iiint\limits_{V-S_D}(\sigma^{*ij}\delta\varepsilon^*_{ij}-\rho K^{*i}\delta u^*_i)dV-\iint\limits_{S_F}\mathfrak{F}^{*i}\delta u^*_i dS=0, \quad (3.12)$$

在此，S_D代表状态C^*的应力不連續面S^*_D上的物体点，在状态C所占有的点的全体。

利用这样形式的虚功原理，可由 Lagrange 方法求出平衡条件。考虑对应于(3.7)的条件

$$\sigma^{*ij}=\sigma^{*ji} \quad (3.13)$$

的σ^{*ij}，和$T^{*\lambda\mu}$同样，σ^{*ij}也是分区可微的，将(1.15)，(3.13)应用于(3.12)，得

$$0=\iiint\limits_{V-S_D}(\sigma^{*ij}x^{*\lambda}_{,i}\delta u^*_{\lambda,j}-\rho K^{*k}\delta u^*_k)dV-\iint\limits_{S_F}\mathfrak{F}^{*k}\delta u^*_k dS$$

$$
\begin{aligned}
&=\iiint\limits_{V-S_D}\{\sigma^{*ij}(\delta_{ki}+u^{*k}_{,i})\delta u^*_{k,j}-\rho K^{*k}\delta u^*_k\}dV-\iint\limits_{S_F}\mathfrak{F}^{*k}\delta u^*_k dS\\
&=-\iiint\limits_{V-S_D}\{(\sigma^{*kj}+\sigma^{*ij}u^{*k}_{,i})_{,j}+\rho K^{*k}\}\delta u^*_k dV\\
&\quad+\iint\limits_{S_D}\mathrm{dif}[\sigma^{*kj}+\sigma^{*ij}u^{*k}_{,i}]n_{Dj}\delta u^*_k dS\\
&\quad+\iint\limits_{S_F}\{(\sigma^{*kj}+\sigma^{*ij}u^{*k}_{,i})n_j-\mathfrak{F}^{*k}\}\delta u^*_k dS.
\end{aligned}
$$

在此，n_{Dj} 是 S_D 上的 L 单位法向量，n_j 是 S 的外向 L 单位法向量。由此式得到用 Lagrange 方法的平衡条件

$$
\left.\begin{array}{ll}
\sigma^{*kj}_{,j}+(\sigma^{*ij}u^{*k}_{,i})_{,j}+\rho K^{*k}=0, & \text{在}(V-S_D)\text{上},\\
\mathrm{dif}[\sigma^{*kj}+\sigma^{*ij}u^{*k}_{,i}]n_{Dj}=0, & \text{在} S_D \text{上},\\
(\sigma^{*kj}+\sigma^{*ij}u^{*k}_{,i})n_j=\mathfrak{F}^{*k}. & \text{在} S_F \text{上。}
\end{array}\right\}\qquad(3.14)
$$

(3.14)及对应于(3.9)的条件

$$
u^{*k}=\bar{u}^{*k},\ \text{在} S_U \text{上}\qquad(3.15)
$$

是应用 Lagrange 方法时的基础方程。

在流体力学中用 Euler 方法比較方便，而在彈性論里利用 Lagrange 方法却便利得多。也就是說，和变形一起探究各物体点，进而討論其平衡及其他性质，这是普通常用的方法。所以今后将主要利用 Lagrange 方法进行研究。

至于运动方程，則只須附加上惯性力作为体力，而求平衡条件卽可。在(3.14)里将

$$
K^{*k}\ \text{代以}\ K^{*k}-\frac{\partial^2 u^{*k}}{\partial t^2}\qquad(3.16)
$$

而得到的式子就是运动方程。

§4 特殊情形的基础方程

1. 对于微小状态变化的平衡条件

命近于状态 C^* 的状态为 C^{**}，且在状态 C^{**} 保持平衡。这个

状态 C^{**} 的物理量都附以記号**。又設对应于状态 C^{*} 及 C^{**} 的物理量的差

$$\Delta u_i^{*}=u_i^{**}-u_i^{*},\quad \Delta\sigma^{*ij}=\sigma^{**ij}-\sigma^{*ij} \tag{4.1}$$

是充分小的。

对于应变張量，在(1.12)内将 u_i^{*} 代以 u_i^{**} 就得到 ε_{ij}^{**}，略去微小量后，就由下式給出 $\Delta\varepsilon_{ij}^{*}$。

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{*}\equiv\varepsilon_{ij}^{**}-\varepsilon_{ij}^{*}=\frac{1}{2}(\Delta u_{i,j}^{*}+\Delta u_{j,i}^{*}+\Delta u_{k,i}^{*}u_{,j}^{*k}+u_{,i}^{*k}\Delta u_{k,j}^{*}). \tag{4.2}$$

至于状态 C^{**} 的平衡条件，乃是在(3.14)内将 σ^{*ij} 代以 σ^{**ij} 而得到的。由状态 C^{**} 的平衡条件各边减去(3.14)的对应边再略去微小量后，就可得到

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\sigma_{,j}^{*kj}+(\Delta\sigma^{*ij}u_{,i}^{*k}+\sigma^{*ij}\Delta u_{,i}^{*k})_{,j}+\rho\Delta K^{*k}=0,\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\text{在}(V-S_D)\text{上};\\&\mathrm{dif}[\Delta\sigma^{*kj}+\Delta\sigma^{*ij}u_{,i}^{*k}+\sigma^{*ij}\Delta u_{,i}^{*k}]n_{Dj}=0,\ \text{在 }S_D\text{ 上},\\&(\Delta\sigma^{*kj}+\Delta\sigma^{*ij}u_{,i}^{*k}+\sigma^{*ij}\Delta u_{,i}^{*k})n_j=\Delta\mathfrak{F}^{*k},\ \text{在 }S_F\text{ 上。}\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

又对应于(3.15)的式子是

$$\Delta u^{*k}=\Delta v^{*k},\ \text{在 }S_U\text{ 上。} \tag{4.4}$$

(4.2)～(4.4)都是 Δu^{*k} 及 $\Delta\sigma^{*ij}$ 的綫性式，所以容易处理。

特别当状态 C^{*} 与基准状态 C 一致时，$u^{*k}=0$，$\sigma^{*ij}=\sigma^{ij}$，所以(4.3)，(4.4)变为

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\sigma_{,j}^{*kj}+(\sigma^{ij}\Delta u_{,i}^{*k})_{,j}+\rho\Delta K^{*k}=0,&&\text{在}(V-S_D)\text{上},\\&\mathrm{dif}[\sigma^{*kj}+\sigma^{ij}\Delta u_{,i}^{*k}]n_{Dj}=0,&&\text{在 }S_D\text{ 上},\\&(\Delta\sigma^{*kj}+\sigma^{ij}\Delta u_{,i}^{*k})n_j=\Delta\mathfrak{F}^{*k},&&\text{在 }S_F\text{ 上},\\&\Delta u^{*k}=\Delta v^{*k},&&\text{在 }S_U\text{ 上。}\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

又(4.2)变为

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{*}=\frac{1}{2}(\Delta u_{i,j}^{*}+\Delta u_{j,i}^{*}). \tag{4.6}$$

此时对于体积应变，利用 $\varepsilon^*_{ij}=0$，由(2.15)，(2.16)得到

$$\Delta\varkappa^*\equiv\varkappa^{**}-\varkappa^*=\Delta\varepsilon^*_{ii}=\Delta u^{*i}_{,i}. \tag{4.7}$$

应該要注意，(4.6)及(4.7)和在(1.12)及(2.16)内略去二次以上各項而得的式子完全同型。

由(4.3)推知，对于状态 C 的应力 σ^{ij}，有平衡条件

$$\left.\begin{aligned}&\sigma^{kj}_{,j}+\rho K^k=0, && 在(V-S_D)上,\\ &\mathrm{dif}[\sigma^{kj}]n_{Dj}=0, && 在 S_D 上,\\ &\sigma^{kj}n_j=\mathfrak{F}^k, && 在 S_F 上\end{aligned}\right\}$$

成立。利用此式于(4.5)，则可将基础方程写成如下形状：

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\sigma^{*kj}_{,j}+\sigma^{ij}\Delta u^{*k}_{,i,j}-\rho K^i\Delta u^{*k}_{,i}\\ &\qquad+\rho\Delta K^{*k}=0, && 在(V-S_D)上,\\ &\mathrm{dif}[\Delta\sigma^{*kj}]n_{Dj}=0, && 在 S_D 上,\\ &\Delta\sigma^{*kj}n_j+\mathfrak{F}^i\Delta u^{*k}_{,i}=\Delta\mathfrak{F}^{*k}, && 在 S_F 上,\\ &\Delta u^{*k}=\Delta v^{*k}, && 在 S_U 上。\end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

2. 微小应变

在日常接触的不少情形中，虽然产生的变位較大，但伴随着产生的应变却很微小。例如，由鋼材作成的构件若仅施行彈性变形时，实际可把它所生的应变看作相当微小。这种情形叫作微小应变。下面就考察这样的情形。

在微小应变情形里，u^{*k} 可以具有限值。除去平行移动外，$u^{*k}_{,i}=u^*_{k,i}$ 可确定状态变化 $C\to C^*$ 的体素位置的变化。今将 $u^*_{k,i}$ 表示为

$$\left.\begin{aligned}&u^*_{k,i}=u^*_{(k,i)}+u^*_{[k,i]},\\ &u^*_{(k,i)}=\frac{1}{2}(u^*_{k,i}+u^*_{i,k}),\quad u^*_{[k,i]}=\frac{1}{2}(u^*_{k,i}-u^*_{i,k}).\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

若 $u^*_{k,i}$ 不取很大的值，则由(1.12)可知，ε^*_{ij} 近似地等于 $u^*_{(i,j)}$，于是 $u^*_{[i,j]}$ 近似地表示体素的旋轉。实际上，命

$$\omega^{*i}=-\frac{1}{2!}\varepsilon_{ijk}u^*_{[j,k]}, \tag{4.10}$$

则 ω^{*i} 的各个分量近似地表示所考虑物体点近傍的体素在 x^i 轴周围的旋轉。于是 ε^*_{ij} 或 $u^*_{(i,j)}$ 比起 1 及 $u^*_{[i,j]}$ 来可以看作微小的❶，从而，当 $i\neq j$ 时，它們比 1 及 $u^*_{k,l}(k\neq l)$ 微小，故可略去。所以在不略去总和記号时，应变張量的表达式及基础方程可写为

$$\varepsilon^*_{ij}=\frac{1}{2}(u^*_{i,j}+u^*_{j,i}+\sum_{k\neq i,k\neq j}u^*_{k,i}u^{*k}_{,j}), \tag{4.11}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_j\sigma^{*kj}_{,j}+\sum_{i\neq k}\sum_{j\neq k}\sigma^{*ij}u^{*k}_{,i,j}+\sum_{i\neq k}\sum_j\sigma^{*ij}_{,j}u^{*k}_{,i}\\&\qquad+\rho K^{*k}=0,\qquad\qquad 在(V-S_D)上,\\&\sum_j\mathrm{dif}[\sigma^{*kj}+\sum_{i\neq k}\sigma^{*ij}u^{*k}_{,i}]n_{Dj}=0,\qquad 在 S_D 上,\\&\sum_j(\sigma^{*kj}+\sum_{i\neq k}\sigma^{*ij}u^{*k}_{,i})n_j=\mathfrak{F}^{*k},\qquad 在 S_F 上。\end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

此时由(2.16)可近似地写出：

$$\varkappa^*(x)=\varepsilon^*_{ii}, \tag{4.13}$$

且近似地有 $dV=dV^*$，$dS=dS^*$，可以使

$$\left.\begin{aligned}&g^*=(D^*)^2=1,\ \ \rho=\rho^*,\ \ \mathfrak{F}^{*i}=F^{*i},\\&\frac{\partial x^{*\lambda}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{*\mu}}{\partial x^j}\sigma^{*ij}=T^{*\lambda\mu}.\end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

由最后一式可知，σ^{*ij} 是 E 应力張量 $T^{*\lambda\mu}$ 对于坐标系(L)的分量。

3. 微小变位

考虑旋轉和体素应变都很微小而且 $u^{*k}_{,i}$ 比起 1 来可以忽略的情形。此时对于 S_U 上物体点所强制的变位若也是微小的，则 u^{*k} 对于物体全部也是微小的。这种情形叫作微小变位的情形，此时显然有

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon^*_{ij}=\frac{1}{2}(u^*_{i,j}+u^*_{j,i}),\quad \varkappa^*=u^*_{i,i},\\&\rho=\rho^*,\ \ \mathfrak{F}^{*i}=F^{*i},\ \ \sigma^{*ij}=T^{*ij}.\end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

---

❶. M. A. Biot: Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech. (Cambridge, 1938), 117.

基础方程变为

$$\left.\begin{array}{ll}\sigma^{*kj}_{,j}+\rho K^{*k}=0, & 在(V-S_D)上,\\ \mathrm{dif}[\sigma^{*kj}]n_{Dj}=0, & 在 S_D 上,\\ \sigma^{*kj}n_j=\mathfrak{F}^{*k}, & 在 S_F 上,\\ u^{*k}=v^{*k}, & 在 S_U 上。\end{array}\right\} \tag{4.16}$$

这些方程也容易用 Euler 方法求出。

4. 曲綫坐标

以上都是用空間 R 里的直交坐标系(X)讲述的，但是在实际情况下，若在空間 R 里固定一个曲綫坐标系 (Y)，有时却更方便。命关于坐标系(Y)的坐标为

$$y^I,\ y^{II},\ y^{III};\ 或\ y^\rho,\ (\rho=I,\ II,\ III);\ 或\ y^r,\ (r=I,\ II,\ III).$$

設坐标系(X)与(Y)間的对应可表示为

$$y^r=y^r(x)\quad 或\quad x^i=x^i(y). \tag{4.17}$$

采用 Lagrange 方法。将基准状态 C 里具有坐标 y^r 的物体点叫作"物体点 y^r"，命它在状态 C^* 中取坐标 $y^{*\rho}$，此时有 $y^{*\rho}=y^{*\rho}(x^*)$。定义坐标系(Y)的基本張量为

$$a_{rs}(y)=\frac{\partial x^i}{\partial y^r}\frac{\partial x^i}{\partial y^s}. \tag{4.18}$$

用此可給出物体点 y^r 及 y^r+dy^r 間的距离 ds:

$$(ds)^2=a_{rs}(y)\,dy^r\,dy^s. \tag{4.19}$$

若命状态 C^* 的物理量关于坐标系(Y)的分量为 $u^{*r}(y)$，$\sigma^{*rs}(y)$，則有

$$\left.\begin{array}{lll}u^{*r}=\dfrac{\partial y^r}{\partial x^i}u^{*i}, & u^*_r=\dfrac{\partial x^i}{\partial y^r}u^*_i(x)=a_{rs}u^{*s}, & v^{*r}=\dfrac{\partial y^r}{\partial x^i}v^{*i},\\ \varepsilon^*_{rs}=\dfrac{\partial x^i}{\partial y^r}\dfrac{\partial x^j}{\partial y^s}\varepsilon^*_{ij}, & \sigma^{*rs}=\dfrac{\partial y^r}{\partial x^i}\dfrac{\partial y^s}{\partial x^j}\sigma^{*ij}, & n_r=\dfrac{\partial x^i}{\partial y^r}n_i,\\ K^{*r}=\dfrac{\partial y^r}{\partial x^i}K^{*i}, & \mathfrak{F}^{*r}=\dfrac{\partial y^r}{\partial x^i}\mathfrak{F}^{*i}. & \end{array}\right\} \tag{4.20}$$

在此必須注意：这些量关于坐标系(Y)的分量都不能直接有物理意义。也就是說，只有由这些分量求出它們关于适当的直交坐标系的分量时，它們才可以具有力及变位等意义。例如 u^{*r} 不是 y^{*r} 和 y^r 的差，而 $\dfrac{\partial x^i}{\partial y^r}u^{*r}$ 才表示 $x^{*i}=x^i(y^*)$ 和 $x^i=x^i(y)$ 的差。

因为 u^{*r} 及其他量都是 L 張量，所以容易就坐标系(Y)誘导出应变張量

的表达式和基础方程等等。若将分号(;)后边的拉丁字母标数 r, s, t 等表示对应于坐标 y^r 等的协变微分，則成立着

$$u^{*r}_{;s}=\frac{\partial y^r}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial y^s}u^{*i}_{,j}. \tag{4.21}$$

于是(1.12)，(3.14)，(3.15)变成

$$\varepsilon^*_{rs}=\frac{1}{2}(u^*_{r;s}+u^*_{s;r}+u^*_{t;r}u^{*t}_{;s}), \tag{4.22}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sigma^{*ts}_{;s}+(\sigma^{*rs}u^{*t}_{;r})_{;s}+\rho K^{*t}=0, && 在(V-S_D)上,\\&\mathrm{dif}[\sigma^{*ts}+\sigma^{*rs}u^{*t}_{;r}]n_{D_s}=0, && 在 S_D 上,\\&(\sigma^{*ts}+\sigma^{*rs}u^{*t}_{;r})n_s=\mathfrak{F}^{*t}, && 在 S_F 上,\end{aligned}\right\} \tag{4.23}$$

$$u^{*r}=v^{*r},\quad 在 S_U 上。 \tag{4.24}$$

在特殊情形下，也可用同样方法，对于由(1.12)等推出的表达式求得关于坐标系(Y)的表現。

和前述一样，u^{*r} 的物理意义也由它們关于适当直交坐标的分量給出。这个直交坐标系对于各物体点不必是共通的。这样附着于各物体点的直交坐标系全体形成非完整坐标系。即使对于这样的坐标系，也可以求出类似于(4.22)～(4.24)形状的应变張量表达式。如此求得的平衡方程，在一般情形下都与“用物理分量表出的平衡方程”相当。

使用 Euler 方法，虽然也容易导出关于坐标系(Y)的平衡条件，但是此时，和一个物体点对应的 $\dfrac{\partial y^{*\rho}(x^*)}{\partial x^{*\lambda}}$ 及其他量的值也随着变形而改变，这是 Euler 方法不便之处。又坐标系(L)也可看作是一个曲線坐标系，对于这个坐标系，应用 Euler 方法所得的結果与用 Lagrange 方法所得的結果是同等的❶。

❶ A. E. Green, R. S. Rivlin, R. T. Shield: Proc. Roy. Soc., A 211 (1952), 128.

第2章 弹性体力学

§5 弹性能与应力应变关系

1. 弹性能

弹性体所生的变形是完全可逆的，应力状态和应变状态是一对一的，L 应力張量 σ^{*ij} 和应变張量 ε^{*}_{ij} 可用和温度与基准状态有关的，并为物体固有的函数关系联結起来。以下我們將考虑这些問題。

因为本书主要地考虑平衡状态，所以仅考虑等温变化的情形。

弹性体内貯存的內部能量可由变形状态唯一地定义。設在状态 C^* 发生可取变位变分 δu^*_i，此时(3.14)可写为

$$\iiint\limits_{V}\rho K^{*i}\delta u^*_i\,dV+\iint\limits_{S_F}\mathfrak{F}^{*i}\delta u^*_i\,dS=\iint\limits_{V-S_D}\sigma^{*ij}\delta\varepsilon^*_{ij}\,dV. \tag{5.1}$$

左边是发生变位变分 δu^*_i 时外力所作的功。按照热力学第一定律，可知这个功等于其間所貯存的內部能 δU，它由

$$\delta U(\delta u^*)=\iiint\limits_{V}\delta A(\varepsilon^*)dV;\ \delta A(\varepsilon^*)=\sigma^{*ij}\delta\varepsilon^*_{ij} \tag{5.2}$$

給出。A 是基准状态 C 里每个单位体积的內部能，它可按照应变状态，除去一个附加常数外唯一地决定。將所考虑的物体适当分割，然后切断并除去外力，通常可以达到各部分的应力为零的状态。再适当决定 A 的附加常数，使 A 之值在这样无应力状态时取零值。此时称 A 为**弹性势**。且对于不为零的 $\delta\varepsilon^*_{ij}$，假定成立着如下的关系：

$$A(\varepsilon^*+\delta\varepsilon^*)-A(\varepsilon^*)-\delta A(\varepsilon^*)>0. \tag{5.3}$$

2. 应力应变关系

弹性势 A 的值由应变状态唯一地决定，并与到达这个状态的过程无关。因此，变分 δA 必须表示为完全微分的形状。于是由(5.2)的第二式可知条件

$$\sigma^{*ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon^*_{ij}}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon^*_{ji}}\right) \tag{5.4}$$

成立。对于微分算子 $\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}}$，当 $i\neq j$ 时，設 $\varepsilon^*_{ij}\neq\varepsilon^*_{ji}$。所以，在具体地知道 A 的形状时，就可由(5.4)求得 σ^{*ij} 与 ε^*_{ij} 間的关系。此时我們知道有关系式

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma^{*ij}}{\partial \varepsilon^*_{kl}}+\frac{\partial\sigma^{*ij}}{\partial \varepsilon^*_{lk}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma^{*kl}}{\partial \varepsilon^*_{ij}}+\frac{\partial\sigma^{*kl}}{\partial \varepsilon^*_{ji}}\right). \tag{5.5}$$

若曉得 σ^{*ij} 与 ε^*_{ij} 的关系，就可将

$$B(\sigma^*)=\sigma^{*ij}\varepsilon^*_{ij}-A(\varepsilon^*) \tag{5.6}$$

看作 σ^{*ij} 的函数而决定。利用它容易給出应力应变关系：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B}{\partial \sigma^{*ij}}+\frac{\partial B}{\partial \sigma^{*ji}}\right)=\varepsilon^*_{ij}. \tag{5.7}$$

对于算子 $\frac{\partial}{\partial\sigma^{*ij}}$，当 $i\neq j$ 时，設 σ^{*ij} 与 σ^{*ji} 是不等的。

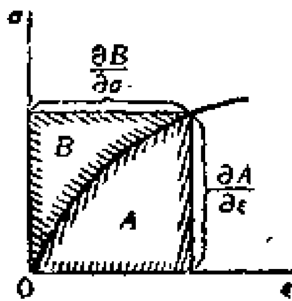


图　5.1

3. Hooke 定律

对于所考虑的物体，假設在将外力除去后再利用适当的变位可以达到无应力状态。若选取这个状态作为基准状态，則此时的弹性势表达式 $A^\circ(\varepsilon^*)$ 就可用溫度以及与所考虑点近傍的坐标系 (X) 有关的弹性性质来确定。現在将基准状态选择如下而进行考察。

当 $A^\circ(\varepsilon^*)$ 可表示为 ε^*_{ij} 的分量的二次齐次型时，我們就說

Hooke 定律成立。这样，物体的弹性势可写成下面的形式：

$$\left.\begin{aligned} A^{\circ}(\varepsilon^{*}) &= \frac{1}{2}E^{ijkl}\varepsilon_{ij}^{*}\varepsilon_{kl}^{*}, \\ E^{ijkl} &= E^{jikl} = E^{ijlk} = E^{klij}. \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

变力应变关系变为

$$\sigma^{*ij} = E^{ijkl}\varepsilon_{kl}^{*}. \tag{5.9}$$

将此式反过来解开，得

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{kl}^{*} &= E_{klij}\sigma^{*ij}, \\ E_{klij} &= E_{lkij} = E_{klji} = E_{ijkl}, \\ E^{ijpq}E_{pqkl} &= \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

于是

$$B^{\circ}(\sigma^{*}) = \sigma^{*ij}\varepsilon_{ij}^{*} - A^{\circ}(\varepsilon^{*}) = A^{\circ}(\varepsilon^{*}) = \frac{1}{2}E_{ijkl}\sigma^{*ij}\sigma^{*kl}. \tag{5.11}$$

对于不为零的任意 ξ_{ij}，由(5.3)可知有

$$2A^{\circ}(\xi) = E^{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} > 0, \quad 2B^{\circ}(\xi) = E_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} > 0. \tag{5.12}$$

这些量 E^{ijkl} 及 E_{ijkl} 叫作"L 弹性系数張量"。

4. 彈性各向同性体，結晶体

設空間 R 的一个直交坐标系是 (Z)，这个坐标系的坐标 記为 z^{a} $(a = \text{i}, \text{ii}, \text{iii})$。坐标变换 $(X) \to (Z)$ 由

$$dz^{a} = P_{i}^{a}dx^{i}, \quad dx^{i} = Q_{a}^{i}dz^{a}, \tag{5.13}$$

$$\left.\begin{aligned} &P_{i}^{a}P_{j}^{a} = \delta_{ij}, \quad Q_{a}^{i}Q_{b}^{i} = \delta_{ab}, \\ &P_{i}^{a}Q_{b}^{i} = \delta_{ab}, \quad Q_{a}^{i}P_{j}^{a} = \delta_{ij}, \quad P_{i}^{a} = Q_{a}^{i} \end{aligned}\right\} \tag{5.14}$$

$$(i, j = 1, 2, 3;\ a, b = \text{i}, \text{ii}, \text{iii})$$

給出。对于这个坐标变换，应变張量按照規律

$$\varepsilon_{ab}^{*} = Q_{a}^{i}Q_{b}^{j}\varepsilon_{ij}^{*}, \quad \varepsilon_{ab}^{*}P_{i}^{a}P_{j}^{b} = \varepsilon_{ij}^{*} \tag{5.15}$$

变换。

在任意的直交坐标变换 $(X) \to (Z)$ 下，若 A° 看作 ε_{ab}^{*} 的函数而保持其形状不变，则这个物体叫作**彈性各向同性体**。此时在 A° 的表达式内，将 ε_{ij}^{*} 的分量各代以 ε_{ab}^{*} 的对应分量，所得到的便是关于任意直交坐标系 (Z) 的表达

式。为此，A° 必须表示为对称張量 ε^*_{ij} 的主値的函数。ε^*_{ij} 的主值 ξ_1, ξ_2, ξ_3 由

$$\det|\varepsilon^*_{ij}-\xi\delta_{ij}|=0$$

的三个根給出，这个方程又可写为

$$\left\{I^*_3-I^*_1 I^*_2+\frac{1}{6}(I^*_1)^3\right\}-\xi\left\{\frac{1}{2}(I^*_1)^2-I^*_2\right\}+\xi^2 I^*_1-\xi^3=0,$$

$$I^*_1=\varepsilon^*_{ii},\ I^*_2=\frac{1}{2}\varepsilon^*_{ij}\varepsilon^*_{ij},\ I^*_3=\frac{1}{3}\varepsilon^*_{ij}\varepsilon^*_{jk}\varepsilon^*_{ki}. \tag{5.16}$$

I^*_1, I^*_2, I^*_3 在坐标变换 $(X)\to(Z)$ 下保持形状不变。若已知 I^*_1, I^*_2, I^*_3，則主值 ξ_1, ξ_2, ξ_3 就可唯一地确定，所以彈性各向同性体的 A° 可表示成 I^*_1, I^*_2, I^*_3 的函数。这时，若命 $A^\circ=\mathfrak{A}(I^*_1, I^*_2, I^*_3)$，則应力应变关系可由

$$\sigma^{*ij}=\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial I^*_1}\delta_{ij}+\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial I^*_2}\varepsilon^*_{ij}+\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial I^*_3}\varepsilon^*_{ik}\varepsilon^*_{kj} \tag{5.17}$$

給出。

若 Hooke 定律成立，再考虑(5.12)就得

$$A^\circ=\mathfrak{A}=\frac{1}{2}\lambda(I^*_1)+2\mu I^*_2,\ \lambda>0,\ \mu>0, \tag{5.18}$$

于是应力应变关系变成

$$\sigma^{*ij}=\lambda I^*_1\delta_{ij}+2\mu\varepsilon^*_{ij}.$$

从而 L 弹性系数張量 E^{ijkl} 是

$$E^{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}). \tag{5.19}$$

在此出現的 λ 及 μ 叫作 **Lamé 常数**。在工程学里常将 λ 及 μ 代以次式所給出的 **Young 模量** E 及 **Poisson 比** ν:

$$E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu},\ \nu=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}; \tag{5.20}$$

用这些常数可以将 L 弹性系数張量表示为

$$\left.\begin{aligned}E^{ijkl}&=\frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\delta_{ij}\delta_{kl}+\frac{E}{2(1+\nu)}(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}),\\E_{ijkl}&=-\frac{\nu}{E}\delta_{ij}\delta_{kl}+\frac{1+\nu}{2E}(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}).\end{aligned}\right\} \tag{5.21}$$

当 σ^{*ij} 的分量除去 σ^{*11} 外都是零时，則有

$$\varepsilon^*_{11}=\frac{1}{E}\sigma^{*11},\ \varepsilon^*_{22}=\varepsilon^*_{33}=-\frac{\nu}{E}\sigma^{*11},$$

所以 E 及 ν 都容易由实驗确定。

在結晶体的情况下，它的彈性具有方向性，存在着弹性相同的方向。此时施行适当的直交坐标变换，就可使关于新坐标系記述的物体彈性性质与最初的取同一形状。这样的直交变换全体形成一个群，彈性势的表达式对于这个群的直交变换都保持形状不变，这就是彈性势的特征。

5. 微小应变

取任意状态 C 作基准状态。設无应力状态 C° 也可用伴有微小应变的变形达到。命关于基准状态 C 的无应力状态 C° 里的应变張量是 ε°_{ij}. 在此情形，应变張量 ε^*_{ij} 比起 1 来是充分小的，所以可設 $g^*_{ij}=\delta_{ij}$. 于是可将曲綫坐标系 (L) 看作局部直交坐标系。从而在所考虑的点的近傍，可将状态 C° 的坐标系 (L) 看作与坐标系 (Z) 同等的。若取无应力状态 C° 作为基准状态，則在所考虑点的近傍容易知道关于坐标系 (Z) 的应变張量等于 $\varepsilon^*_{ij}-\varepsilon^\circ_{ij}$. 利用这个事实容易求得物体在基准状态 C 的彈性势的表示式。

在微小应变情况下，一般可以认为 Hooke 定律成立。所以用适当的 L 弹性系数所表示的張量 E^{ijkl}, 可以得到

$$A(e^*)=\frac{1}{2}E^{ijkl}(\varepsilon^*_{ij}-\varepsilon^\circ_{ij})(\varepsilon^*_{kl}-\varepsilon^\circ_{ij}), \tag{5.22}$$

由此得到应力应变关系

$$\left.\begin{aligned}\sigma^{*ij}&=E^{ijkl}(e^*_{ij}-\varepsilon^\circ_{ij})=E^{ijkl}e^*_{ij}+\sigma^{ij},\\ \sigma^{ij}&=-E^{ijkl}\varepsilon^\circ_{ij}.\end{aligned}\right\} \tag{5.23}$$

6. 曲綫坐标系

若导入曲綫坐标系 (Y)，并将 A 或 B 用 ε^*_{rs} 或 σ^{*rs} 的函数决定时，則 σ^{*rs} 与 ε^*_{rs} 的关系也可容易求得。即

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon^*_{rs}}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon^*_{sr}}\right)&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon^*_{ij}}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon^*_{ji}}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varepsilon^*_{ij}}{\partial \varepsilon^*_{rs}}+\frac{\partial \varepsilon^*_{ij}}{\partial \varepsilon^*_{sr}}\right)\\ &=\sigma^{*ij}\frac{\partial y^r}{\partial x^i}\frac{\partial y^s}{\partial x^j}=\sigma^{*rs},\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial B}{\partial \sigma^{*rs}}+\frac{\partial B}{\partial \sigma^{*sr}}\right)&=\varepsilon^*_{rs}.\end{aligned}\right\} \tag{5.24}$$

若作成逆变張量

$$a^{rs}=\frac{\partial y^r}{\partial x^i}\frac{\partial y^s}{\partial x^i},\tag{5.25}$$

显然有

$$a^{rs}a_{st}=\delta^r_t=\delta_{rt},\tag{5.26}$$

由此得

$$\left.\begin{aligned}I_1^*=\varepsilon^*_{rs}a^{rs},\qquad I_2^*=\frac{1}{2}\varepsilon^*_{rs}\varepsilon^*_{tu}a^{ru}a^{st},\\ I_3^*=\frac{1}{3}\varepsilon^*_{rs}\varepsilon^*_{tu}\varepsilon^*_{vw}a^{rw}a^{st}a^{uv}.\end{aligned}\right\}\tag{5.27}$$

于是弹性各向同性体的应力应变关系可以写成

$$\sigma^{*rs}=\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial I_1^*}a^{rs}+\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial I_2^*}\varepsilon^*_{tu}a^{ru}a^{st}+\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial I_3^*}\varepsilon^*_{tu}\varepsilon^*_{vw}a^{rw}a^{st}a^{uv}.\tag{5.28}$$

§6 余应力与协調条件

1. 余应力

在§5已述說过，对物体施行适当变形时可达到无应力状态的情形。現在考察可能达到这样情况的条件。若将加在物体的外力除去，通常并得不到无应力状态，此时所剩下的应力叫作余应力。

将給予所考虑物体在 S_U 上物体点的变位 v^{ci} 加以强制，而考虑除去外力以后的状态。对物体施行适当变位时，有可以除去余应力的情形，也有不可能除去余应力的情形。例如，在将橡胶制的半球壳翻过来的状态里，虽有余应力存在，但可以除去。以下将考虑“不可除去的余应力”。

設所考虑物体在基准状态 C 的应力应变关系可用(5.4)給出。若此时对应于 $\sigma^{*ij}=0$ 的应变張量是 ε°_{ij}，則它可当作方程

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A(\varepsilon^\circ)}{\partial\varepsilon^*_{ij}}+\frac{\partial A(\varepsilon^\circ)}{\partial\varepsilon^*_{ji}}\right)=0\tag{6.1}$$

的解而得出，在 S_D 以外它可以看作連續可微的。对于服从 Hooke 定律的物体，在微小应变情况下，由(5.22)可知，利用基准状态的 L 应力張量 σ^{ij} 就能給出 ε°_{ij} 为

$$\varepsilon^\circ_{ij}=-E_{ijkl}\sigma^{kl}.\tag{6.2}$$

若对物体施行連續变形，如果在过程中存在着使各点的应变張量恒等于 ε_{ij}° 的状态 C°，那末所考虑物体就可以到达无应力状态。命此时的变位是 $u^{\circ i}$，则由(1.10)，(1.12)可知 $u^{\circ i}$ 一定滿足

$$\left.\begin{aligned} g_{ij}^{\circ}\equiv\delta_{ij}+2\varepsilon_{ij}^{\circ}=\frac{\partial x^{\circ k}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{\circ k}}{\partial x^{j}},\\ x^{\circ k}=x^{k}+u^{\circ k},\ 在(V-S_D)上;\end{aligned}\right\}\tag{6.3}$$

$$u^{\circ i}=v^{\circ i},\ 在 S_U 上。\tag{6.4}$$

并存在着这样連續的分区可微的 $u^{\circ i}$，对应于它的变形状态可以由状态 C 用連續变形达到；这便是无应力状态 C° 的存在条件，叫作协調条件(condition of compatibility)。以下将予以詳細討論。

2. 协調条件

首先，微分方程(6.3)的解 $x^{\circ k}$ 对于不含 S_D 的任意单連通区域一定存在。这个問題作为微分几何里的等值問題是众所周知的，其充要条件是对应于基本張量 g_{ij}° 的曲率張量 $R_{jkl}^{\circ i}$ 等于零，$R_{jkl}^{\circ i}$ 可表示如下[1]：

$$\left.\begin{aligned} R_{jkl}^{\circ i}=\frac{\partial\begin{Bmatrix} i\\ j\ k\end{Bmatrix}^{\circ}}{\partial x^{l}}-\frac{\partial\begin{Bmatrix} i\\ j\ l\end{Bmatrix}^{\circ}}{\partial x^{k}}+\begin{Bmatrix} m\\ j\ k\end{Bmatrix}^{\circ}\begin{Bmatrix} i\\ m\ l\end{Bmatrix}^{\circ}\\ -\begin{Bmatrix} m\\ j\ l\end{Bmatrix}^{\circ}\begin{Bmatrix} i\\ m\ k\end{Bmatrix}^{\circ}=0,\\ \begin{Bmatrix} i\\ j\ k\end{Bmatrix}^{\circ}=\frac{1}{2}g^{\circ il}(g_{lj,k}^{\circ}+g_{lk,j}^{\circ}-g_{jk,l}^{\circ}),\\ g^{\circ ij}=g^{\circ ji},\quad g^{\circ ij}g_{jk}^{\circ}=\delta_{ik}.\end{aligned}\right\}\tag{6.5}$$

此时 $x^{\circ k}$ 在不含 S_D 的任意单連通区域里，除去一个剛体运动外可以完全决定。若将所考虑的物体沿着不連續面 S_D 切开，再利用适当的截断，可以使切出的各部分变成单連通的。对于这样所得到的各部分，若有上述的 $x^{\circ k}$ 存在，则 $x^{\circ k}$ 所作成的点集叫作该部分的自由象。要使自由象在为了形成单連通而切断了的断面上重新

---

[1] 参照本丛书：《几何学》§46。

接連起来，就必須使断面上在切断前占有同一位置的点还要占有相同位置。此外，通过对各部分的自由象的剛体运动，必須使 S_D 上的对应点处于同样点的位置，而且使 S_U 上的物体点占有点 $x^i+v^{\circ i}$ 的位置。这样，对于物体全部便从新得到了連續而不相重合的自由象。对应于它的状态自然可借物体的連續变形而到达，也就是說，物体存在着无应力状态。这便是协調条件。

若将无应力状态的圓环切断，扭轉一周后，使以前的对应点仍占相同位置而接連起来，則存在着不能除去的余应力，但对于这个物体显然存在着連續的自由象。这是因为无論将所考虑的物体施行怎么样的連續变形，但决不能达到对应于自由象的变形状态。

3. 微小变位情形的协調条件

协調条件通常很复杂，但在 ε_{ij}° 很小而可看作微小变位的情形下，却可相当簡单地表示出来。以下所考虑的物体是表面十分光滑，而且限于不給出其上的强制变位，又沒有不連續面的情形。此时由微小变位的假定可知，連續自由象的存在就变成了协調条件。

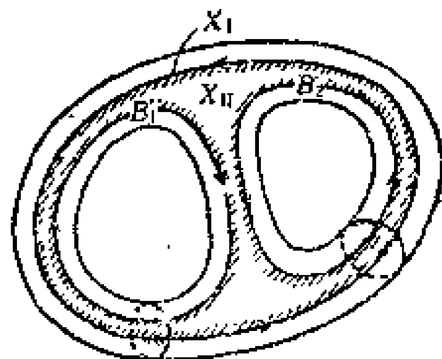


图 6.1 双連通的物体
$\partial X_{II}=X_I+B_1-B_2$

設所考虑的物体是 p 連通的。将此物体沿着适当的 p 个面截断时，就可变成单連通的。适当地确定具有指定正方向的閉曲綫，让它們各与这样的面中的一个仅相交一回，且設它們是 B_1, B_2, …, B_p. 利用对于整数 b_1, …, b_p 的綫性結合 $b_1B_1+\cdots+b_pB_p$，考虑所作成的組"b_1 个 B_1, …, b_p 个 B_p"，但設负系数是将 B 的正向反轉过来的。要注意，在物体內指定了正方向的任意閉曲綫，連同 B_1, …, B_p 的一个适当綫性結合 $b_1B_1+\cdots+b_pB_p$, 一起形成物体內具有指定正負側的一个曲面 X_{II} 的周界。

在此，若略去 $u^{\circ k}$ 的二次項，則(6.3)变为

$$\frac{1}{2}(u_{i,j}^{\circ}+u_{j,i}^{\circ})=\varepsilon_{ij}^{\circ}. \qquad (6.6)$$

为了使满足这个式子的 u_i° 存在，ε_{ij}° 必須恒等地满足

$$u_{i,j,k}^{\circ}-u_{i,k,j}^{\circ}=0. \qquad (6.7)$$

微分(6.6)，更利用(6.7)，得

$$\frac{1}{2}(u^{\circ}_{i,k,j}+u^{\circ}_{j,k,i})=\varepsilon^{\circ}_{ij,k},$$

由此得

$$u^{\circ}_{[j,k],i}=\frac{1}{2}(u^{\circ}_{j,k}-u^{\circ}_{k,j})_{,i}=\varepsilon^{\circ}_{ij,k}-\varepsilon^{\circ}_{ik,j}=2\,\varepsilon^{\circ}_{i[j,k]}.$$

所以若用新函数 Ω°_{jk} 代替 $u^{\circ}_{[j,k]}$ 时，则得联立微分方程

$$\left.\begin{aligned}&\Omega^{\circ}_{ij}+\Omega^{\circ}_{ji}=0,\\&\Omega^{\circ}_{ij,k}=2\,\varepsilon^{\circ}_{k[i,j]},\\&u^{\circ}_{i,j}=\varepsilon^{\circ}_{ij}+\Omega^{\circ}_{ij}.\end{aligned}\right\}\text{在 }V\text{ 上。}\tag{6.8}$$

这个方程組的解 u°_i 及 Ω°_{ij} 的存在条件就是协調条件。

沿着物体内的一条曲綫，自一物体点 a^i 到另一物体点 x^i，将 (6.8) 的第二式作积分时，得

$$\Omega^{\circ}_{ij}=\Omega^{\circ}_{ij}(a)+2\int_a^x\varepsilon^{\circ}_{k[i,j]}dx^k.\tag{6.9}$$

但是
$$\{(x^k-a^k)\Omega^{\circ}_{ik}\}_{,j}=\Omega^{\circ}_{ij}+(x^k-a^k)\Omega^{\circ}_{ik,j},$$

由此求出 Ω°_{ij}，并将它代入到(6.8)的第三式內，再用(6.8)的第二式，将所得式子沿着以前同一曲綫作积分时，則有

$$u^{\circ}_i=u^{\circ}_i(a)+(x^k-a^k)\Omega^{\circ}_{ik}+\int_a^x\{\varepsilon^{\circ}_{ij}-2(x^k-a^k)\varepsilon^{\circ}_{j[i,k]}\}dx^j.\tag{6.10}$$

若想使(6.8)可积，由(6.9)，(6.10)所定的 Ω°_{ij} 及 u°_i 就必須唯一地决定。为此，(6.9)及(6.10)內沿着任意閉曲綫 $X_{\rm I}$ 所作的积分必須是

$$\oint_{X_{\rm I}}\varepsilon^{\circ}_{k[i,j]}dx^k=0,\quad\oint_{X_{\rm I}}\{\varepsilon^{\circ}_{ij}-2(x^k-a^k)\varepsilon^{\circ}_{j[i,k]}\}dx^j=0.\tag{6.11}$$

首先，考虑 V 的任意面素 $X_{\rm II}$ 的周界所成閉曲綫 $X_{\rm I}=\partial X_{\rm II}$，利用 Stokes 定理(2.19)将(6.11)变形，得

$$\frac{1}{2!}\iint\limits_{X_{\rm II}}\varepsilon^{\circ}_{k[i,j],l}\,dx^{kl}=\frac{1}{2!}\iint\limits_{X_{\rm II}}\frac{1}{2}(\varepsilon^{\circ}_{k[i,j],l}-\varepsilon^{\circ}_{l[i,j],k})dx^{kl}=0,$$

$$\frac{1}{2!}\iint\limits_{X_{\rm II}}\{\varepsilon^{\circ}_{ij,l}-2\varepsilon^{\circ}_{j[i,l]}-2(x^k-a^k)\varepsilon^{\circ}_{j[i,k],l}\}dx^{jl}$$

$$=\frac{1}{2!}\iint\limits_{X_{\rm II}}\{\varepsilon^{\circ}_{i[j,l]}-(\varepsilon^{\circ}_{j[i,l]}-\varepsilon^{\circ}_{l[i,j]})-(x^k-a^k)(\varepsilon^{\circ}_{j[i,k],l}-\varepsilon^{\circ}_{l[i,k],j})\}dx^{jl}$$

$$=-\frac{1}{2!}\iint\limits_{X_{\rm II}}(x^k-a^k)(\varepsilon^{\circ}_{l[i,k],l}-\varepsilon^{\circ}_{l[i,k],j})dx^{jl}=0.$$

这个式子成立的充要条件是

$$\varepsilon^{\circ}_{[k[i,j],l]}=\frac{1}{2}(\varepsilon^{\circ}_{k[i,j],l}-\varepsilon^{\circ}_{l[i,j],k})=0. \qquad (6.12)$$

如前所述，任意閉曲綫 X_I 連同适当的 $b_1B_1+\cdots+b_pB_p$ 一起形成一个有向曲面 X_{II} 的周界。所以(6.12)成立时，有

$$\oint_{X_I}\varepsilon^{\circ}_{k[i,j]}dx^k+\int_{b_1B_1+\cdots+b_pB_p}\varepsilon^{\circ}_{k[i,j]}dx^k=0.$$

于是，(6.11)的第一式变为

$$\int_{X_I}\varepsilon^{\circ}_{k[i,j]}dx^k=-\int_{b_1B_1+\cdots+b_pB_p}\varepsilon^{\circ}_{k[i,j]}dx^k$$

$$=-b_1\int_{B_1}\varepsilon^{\circ}_{k[i,j]}dx^k-\cdots-b_p\int_{B_p}\varepsilon^{\circ}_{k[i,j]}dx^k=0.$$

此式成立的充要条件为

$$\int_{B_\beta}\varepsilon^{\circ}_{k[i,j]}dx^k=0 \quad (\beta=1,2,\cdots,p). \qquad (6.13)$$

同样，由(6.11)的第二式得条件

$$\int_{B_\beta}\{\varepsilon^{\circ}_{ij}-2(x^k-a^k)\varepsilon^{\circ}_{j[i,k]}\}dx^j=0 \quad (\beta=1,2,\cdots,p). \qquad (6.14)$$

(6.12) ~ (6.14)成立时，由(6.9)，(6.10)所定的 Ω°_{ij} 及 u°_i 除去六个常数 $u^{\circ}_i(a)$ 及 $\Omega^{\circ}_{ij}(a)$ 外完全决定，(6.8)就可以积分；于是(6.12) ~ (6.14)是协調条件。

(6.12)是局部的协調条件，在略去 ε°_{ij} 的二次以上的項时，可知有

$$R^{\circ i}_{jkl}=4\,\varepsilon^{\circ}_{[k[i,j],l]},$$

所以(6.5)与(6.12)是等价的。

若在物体表面給出强制变位；而且有不連續面存在时，协調条件也不难求得。

§7　关于平衡的定理与稳定条件

1．关于平衡的变分原理

在热力学里我們知道，热力势对于等温等压变化在平衡状态时取极小值。在彈性論里也有同样的变分原理，它取如下形式：

“采用在 S_U 上和給出的强制变位 v^*_i 一致的变位 u^{**}_i，根据給出的体力 K^{*i} 及 S_F 上的表面力 $\mathfrak{F}^{*i}$ 所計算的下列式子

$$U[u^{**}]=\iiint_V A(\varepsilon^{**})dV-\iiint_V \rho K^{*i}u_i^{**}dV-\iint_{S_F}\mathfrak{F}^{*i}u_i^{**}dS, \quad (7.1)$$

对于这些外力及强制变位，保持平衡状态时的变位取逗留值。这里 ε_{ij}^{**} 是对应于变位 u_i^{**} 的应变張量。”

这个原理可用如下形式指示出来。設平衡状态 C^* 的变位是 u_i^*，命 $u_i^{**}-u_i^*=\delta u_i^*$ 是微小的，则有

$$U[u^{**}]-U[u^*]=\iiint_V (A(\varepsilon^{**})-A(\varepsilon^*))dV$$

$$-\iiint_V \rho K^{*i}\delta u_i^* dV-\iint_{S_F}\mathfrak{F}^{*i}\delta u_i^* dS.$$

然而

$$A(\varepsilon^{**})-A(\varepsilon^*)=A(\varepsilon^*+(\varepsilon^{**}-\varepsilon^*))-A(\varepsilon^*)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A(\varepsilon^*)}{\partial\varepsilon_{ij}^*}+\frac{\partial A(\varepsilon^*)}{\partial\varepsilon_{ji}^*}\right)(\varepsilon_{ij}^{**}-\varepsilon_{ij}^*)$$

$$+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 A(\varepsilon^*)}{\partial\varepsilon_{ij}^*\partial\varepsilon_{kl}^*}(\varepsilon_{ij}^{**}-\varepsilon_{ij}^*)(\varepsilon_{kl}^{**}-\varepsilon_{kl}^*)+O[(\delta u^*)^3]$$

$$=\sigma^{*ij}\left(\delta\varepsilon_{ij}^*+\frac{1}{2}\delta u_{k,i}^*\delta u_{,j}^{*k}\right)$$

$$+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 A(\varepsilon^*)}{\partial\varepsilon_{ij}^*\partial\varepsilon_{kl}^*}\delta\varepsilon_{ij}^*\delta\varepsilon_{kl}^*+O[(\delta u^*)^3],$$

但 σ^{*ij} 是状态 C^* 的 L 应力張量，$\delta\varepsilon_{ij}^*$ 是对应于 δu_i^* 的应变变分。将此式代入上式，更利用虛功原理(3.12)，就得到

$$U[u^{**}]-U[u^*]=\iiint_V\left(\sigma^{*ij}\frac{1}{2}\delta u_{k,i}^*\delta u_{,j}^{*k}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}^*\partial\varepsilon_{kl}^*}\delta\varepsilon_{ij}^*\delta\varepsilon_{kl}^*+O[(\delta u^*)^3]\right)dV. \quad (7.2)$$

可知 $U[u^{**}]$ 在平衡状态即 $u_i^{**}=u_i^*$ 时取逗留值。

当体力及表面力給出为变位的函数时，若这些外力都具有势，则也可得到上述同样的原理。

2. 稳定条件

考虑平衡状态 C^* 的稳定性。設外力与变位是独立地給出的。移到状态 C^* 以外的状态时也命体力为 K^{*i}，表面力为 $\mathfrak{F}^{*i}$。

設在状态 C^* 保持平衡的物体上，由外界加上一些干扰将平衡打乱；我們就考察此时物体的运动。命状态 C^* 近傍的状态为 C^{**}。此时运动方程可在(3.14)内将 u^{*i}, σ^{*ij}, K^{*i} 各代以 u^{**i}, σ^{**ij}, $K^{*i}-\dfrac{\partial^2 u^{**i}}{\partial t^2}$ 而求得。即是

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma^{**kj}_{,j}+(\sigma^{**ij}u^{**k}_{,i})_{,j}+\rho\left(K^{*k}-\frac{\partial^2 u^{**k}}{\partial t^2}\right)=0,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{在}(V-S_D)\text{上},\\
&\operatorname{dif}\,[\sigma^{**kj}+\sigma^{**ij}u^{**k}_{,i}]n_{Dj}=0,\quad \text{在 } S_D \text{ 上},\\
&(\sigma^{**kj}+\sigma^{**ij}u^{**k}_{,i})n_j=\mathfrak{F}^{*k},\qquad \text{在 } S_F \text{ 上}。
\end{aligned}\right\}\tag{7.3}$$

对于变位 u^{**i} 当然有

$$u^{**k}=v^{*k},\ \text{在 } S_U \text{ 上}。\tag{7.4}$$

将(7.4)第一式乘以 $\dfrac{\partial u^{**k}}{\partial t}$，再将所得式子就 $V-S_D$ 全体作积分，用 Stokes 定理(2.20)将它变形，则得

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_{V-S_D}\left\{-\sigma^{**ij}(x^k+u^{**k})_{,i}\frac{\partial u^{**k}_{,j}}{\partial t}+\rho K^{*k}\frac{\partial u^{**k}}{\partial t}\right\}dV\\
&\quad+\iint\limits_{S_D}\operatorname{dif}[\sigma^{**kj}+\sigma^{**ij}u^{**k}_{,i}]n_{Dj}\frac{\partial u^{*k}}{\partial t}\,dS_D\\
&\quad+\iiint\limits_{S_F}(\sigma^{**kj}+\sigma^{**ij}u^{**k}_{,i})n_j\frac{\partial u^{**}}{\partial t}\,dS\\
&=\iiint\limits_{V}\rho\frac{\partial^2 u^{**k}}{\partial t^2}\frac{\partial u^{**k}}{\partial t}\,dV.
\end{aligned}$$

注意到由(1.10)，(1.12)有

$$\frac{\partial \varepsilon^{**}_{ij}}{\partial t}=\frac{1}{2}\left[(x^k+u^{**k})_{,i}\frac{\partial u^{**k}_{,j}}{\partial t}+(x^k+u^{**k})_{,j}\frac{\partial u^{**k}_{,i}}{\partial t}\right],$$

再利用(7.3)的第二及第三式，则上式变为

$$\iiint\limits_{V-S_D}\left(-\sigma^{**ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}^{**}}{\partial t}+\rho K^{**k}\frac{\partial u_k^{**}}{\partial t}\right)dV+\iint\limits_{S_F}\mathfrak{F}^{**k}\frac{\partial u_k^{**}}{\partial t}dS$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V\frac{1}{2}\rho\frac{\partial u^{**k}}{\partial t}\frac{\partial u^{**k}}{\partial t}dV.$$

利用(5.2)，从受干扰的时間 t^* 开始，对时間作积分，根据(7.1)，就得到

$$-U[u^{**}]+U[u^*]=\iiint\limits_V\frac{1}{2}\rho\left\{\frac{\partial u^{**k}}{\partial t}\frac{\partial u^{**k}}{\partial t}-\left(\frac{\partial u^{**k}}{\partial t}\frac{\partial u^{**k}}{\partial t}\right)_{t=t^*}\right\}dV. \tag{7.5}$$

对于使 $u^{**k}-u^{*k}=\delta u^{*k}$ 成为微小的任何 u^{**k}，只要 $u^{**k}\neq u^{*k}$，并且 $U[u^{**}]-U[u^*]>0$，則(7.5)的右側，亦即运动能的增加变为負的。在此时且仅限于此时，微小干扰就不能引起大的运动。于是，若 δu^{*k} 是可取变位变分，而且 $\delta u^{*k}=0$ 不成立，則稳定条件是

$$U[u^{**}]-U[u^*]>0,\quad u^{**k}=u^{*k}+\delta u^{*k}. \tag{7.6}$$

利用(6.2)且略去三次以上的項，稳定条件就将变成

$$\iiint\limits_V\left(\sigma^{*ij}\frac{1}{2}\delta u_{k,i}^*\delta u_{,j}^{*k}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}^*\partial\varepsilon_{kl}^*}\delta\varepsilon_{ij}^*\delta\varepsilon_{kl}^*\right)dV>0. \tag{7.7}$$

由此可知，"(7.1)所給出的 $U[u^{**}]$ 在稳定平衡状态时取极小值"。

3. 在微小变位情形下解的唯一性

考虑 Hooke 定律成立而且取无应力状态作基准状态的情形。在微小变位的情况下，有

$$\varepsilon_{ij}^{**}-\varepsilon_{ij}^*=\delta\varepsilon_{ij}^*,$$

又由(5.7)，(5.12)，只要 $\delta\varepsilon_{ij}^*=0$ 不成立，就有

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 A^\circ(\varepsilon^*)}{\partial\varepsilon_{ij}^*\partial\varepsilon_{kl}^*}\delta\varepsilon_{ij}^*\delta\varepsilon_{kl}^*=\frac{1}{2}E^{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}^*\delta\varepsilon_{kl}^*>0.$$

于是和一般情形作同样的計算，就正确地得到

$$U[u^{**}]-U[u^{*}]=\iiint_V \frac{1}{2}E^{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}^{*}\delta\varepsilon_{kl}^{*},$$

所以稳定条件(7.6)常成立。

此时存在着对应于既知外力及强制变位的两个平衡状态。設此时的变位各为 u^{*k} 及 u^{**k}。若对应的应变之差 $\varepsilon_{ij}^{**}-\varepsilon_{ij}^{*}=\delta\varepsilon_{ij}^{*}$ 不为零,则同时必有

$$U[u^{**}]-U[u^{*}]>0,\ U[u^{*}]-U[u^{**}]>0$$

成立。这是一个矛盾,所以对于已給的条件,应变分布是唯一地决定的。若在表面部分 S_U 上指定变位时,则变位也可以唯一地决定。这便是微小变位情形的特征,叫作**解的唯一性**。

§8 压 屈

1. 彈性不穩定現象

如前所述,在微小变位情形下,服从 Hooke 定律的物体永远是稳定的,其应变分布对于既知外力及强制变位恒可唯一决定。微小变位的平衡条件(4.16),是在一般情形的条件式(3.14)內略去应力与变位微分的乘积項而得到的,所以应力微小的情形,通常可假定是微小变位的情形。若物体内的应力增大,则平衡条件式里的应力与变位微分的乘积項逐漸增加重要性,就不能假定是微小变位情形了。此时,在給出的外力及强制变位下,物体的可能平衡状态不必是唯一决定的,且其各个平衡状态也不限于都是稳定的。

試想将薄橡胶半球壳加上适当外力翻轉过来的情形。当外力达到某一値后,随着外力的减少,球壳仍在变形,直到翻过来的状态为止。故此最初状态及翻过来的状态都是无外力作用的平衡状态。并且这种平衡状态对增加的外力是稳定的,但当外力达到最大值后,平衡状态不稳定,从而也就不能恢复原来的平衡状态。

由稳定平衡状态过渡到不稳定平衡状态的界限点叫作**稳定临界点**，它在工程学上很重要。在上述橡胶半球壳的例子中，对应于力的最大値的状态就是稳定临界点。

这样的不稳定现象有各种不同的种类，将外力及强制变位用时間的函数給出，并借助于各瞬間的平衡状态的决定就可研究这些現象了。

我們将說明日常屡次遇到的一种不稳定現象，这就是所謂压屈(buckling)。

2. 压屈

一个具有完全直軸的棒，如果它所受外力的作用綫重合于它的軸，則不拘外力如何，使軸恒保持完全直的平衡状态是可能的。但这个平衡状态不必是稳定的。不稳定的平衡状态，在受到外部很小的干扰或其他影响时就失去了平衡。

在一般情形，具有某些几何特性的物体，在受有不改变其特性的外力作用时所出現的不稳定現象叫作压屈。当压屈現象一旦出現，物体的几何特性馬上就失去。在上述直棒的情形，若作用有垂直于棒軸方向的外力，棒軸自然不再为直綫，但当不考虑这种外力作用后，軸仍然急剧地弯曲，这时棒就出現压屈。

此处所考虑的物体若保持其几何特性，則体素的旋轉通常是微小的。所以若設所生的应变是微小的，則如§4所說的一样，$u_{i;j}$也是微小的。从而，該物体虽允許有限变位，但是对于保持其几何特性的平衡状态，只要应变微小，也可照常使用微小变形情形的理論。但在考察該物体平衡状态的稳定性时，就当然要考虑到有限变位。以下将在物体所生的应变是微小的假設下进行研究。

将外力表为时間的函数以后，就可使用微小变位理論来决定保持几何特性的平衡状态$C^*(t)$。設該状态的L应力張量是

$\sigma^{*ij}(x,t)$，且将这些 $\sigma^{*ij}(x,t)$ 看作是完全确定了的，就可用有限变位的观点来研究状态 $C^*(x,t)$ 的稳定性。

3. 稳定条件

考虑在时間 $t=t^*$ 时状态 $C^*(t^*)=C^*$ 的稳定性。設 $\sigma^{*ij}(x,t^*)=\sigma^{*ij}(x)$，則稳定条件可用和(7.7)同形状的式子給出。設所考虑的物体服从 Hooke 定律，并且已設应变是微小的。所以

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}^*\partial\varepsilon_{ij}^*}\delta\varepsilon_{ij}^*\delta\varepsilon_{ij}^*=\frac{1}{2}E^{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}^*\delta\varepsilon_{kl}^*=A^\circ(\delta\varepsilon^*), \qquad (8.1)$$

只要 δ_{ij}^* 不为零，这个式子就是恒正的。所以稳定条件(7.7)可改写为

$$1>\Lambda[\delta u^*]=\frac{-\iiint\limits_V\sigma^{*ij}\frac{1}{2}\delta u_{k,i}^*\delta u_{,j}^{*k}dV}{\iiint\limits_V A^\circ(\delta\varepsilon^*)dV}. \qquad (8.2)$$

由于状态 C^* 的变位微小，略去(1.15)里的微小量时，将 $\delta\varepsilon_{ij}^*$ 取为

$$\delta\varepsilon_{ij}^*=\frac{1}{2}(\delta u_{i,j}^*+\delta u_{j,i}^*) \qquad (8.3)$$

就成了。对于任意可取变位变分 δu_i^*，(8.2)必成立，所以稳定条件可給出为

$$1>\underset{\delta u^*}{\mathrm{Max}}\,\Lambda[\delta u^*], \qquad (8.4)$$

于是稳定临界点由

$$1=\underset{\delta u^*}{\mathrm{Max}}\,\Lambda[\delta u^*] \qquad (8.5)$$

确定。

若决定了各瞬間的 L 張量，就可以决定对于該状态的 $\underset{\delta u^*}{\mathrm{Max}}\,\Lambda[\delta u^*]$ 的値，于是可得出該状态的稳定性。下面考虑如何决定这个値的問題。

在(8.4)里出現了变分問題：

$$\Lambda[\delta u^*]=\mathrm{Max}, \qquad (8.6)$$

导入 Lagrange 待定乘数 λ，这个变分問題 (8.6) 就等价于下列的变分問題：

$$-\iiint_V \sigma^{*ij}\frac{1}{2}\delta u^*_{k,i}\delta u^{*k}_{,j}dV-\lambda\iiint_V A^\circ(\delta\varepsilon^*)dV=\text{Max}, \quad (8.7)$$

而 $\delta\varepsilon^*_{ij}$ 是由(8.3)給出的。所以变分問題(8.7)的 Euler 条件是

$$\left.\begin{aligned}&(\sigma^{*ij}\delta u^{*k}_{,i})_{,j}+\lambda\delta\sigma^{*kj}_{,j}=0, \quad \text{在}(V-S_D)\text{上},\\&\text{dif}[\sigma^{*ij}\delta u^{*k}_{,i}+\lambda\delta\sigma^{*kj}]n_{Dj}=0, \quad \text{在}\ S_D\ \text{上},\\&(\sigma^{*ij}\delta u^{*k}_{,i}+\lambda\delta\sigma^{*kj})n_j=0, \quad \text{在}\ \bar{S}_F\ \text{上。}\end{aligned}\right\} \quad (8.8)$$

在此 $\delta\sigma^{*ij}$ 是对应于 $\delta\varepsilon^*_{ij}$ 的应力变分，且

$$\delta\sigma^{*ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A^\circ(\delta\varepsilon^*)}{\partial\delta\varepsilon^*_{ij}}+\frac{\partial A^\circ(\delta\varepsilon^*)}{\partial\delta\varepsilon^*_{ji}}\right)=E^{ijkl}\delta\varepsilon^*_{kl}. \quad (8.9)$$

方程(8.8)給出了一个特征值問題，将特征值按大小順序排列出来，給以番号，命为

$$\lambda_{\rm I},\ \lambda_{\rm II},\ \cdots,$$

我們就可按如下方式指出最大特征值 $\lambda_{\rm I}$ 等于

$$\lambda_{\rm I}=\underset{\delta u^*}{\text{Max}}\ A[\delta u^*]. \quad (8.10)$$

若命特征值 $\lambda_{\rm I}$ 所对应的特征函数是 $\delta u^{*k}_{\rm I}$，它对应的应力变分是 $\delta\sigma^{*ij}_{\rm I}$，則在(8.8)内将 λ 及 δu^{*k} 各代以 $\lambda_{\rm I}$ 及 $\delta u^{*k}_{\rm I}$ 而得的式子必然成立。将其第一式乘以 $\delta u^{*k}_{\rm I}$ 后再就 V 全体作积分，更利用第二及第三式，則有

$$\lambda_{\rm I}=A[\delta u^*_{\rm I}]. \quad (8.11)$$

所以稳定条件变成

$$1>\lambda_{\rm I}. \quad (8.12)$$

稳定临界点由

$$1=\lambda_{\rm I} \quad (8.13)$$

确定。

在稳定临界点上，将 $\lambda=1$ 代入到(8.8)而得的式子必定成立。

应当注意，这些式子和在(4.5)的最初三个式子里，将 $\Delta\varepsilon_{ij}^*$ 及 $\Delta\sigma^{*ij}$ 各代以 $\delta\varepsilon_{ij}^*$ 及 $\delta\sigma^{*ij}$ 而同时設外力及强制变位的变化都是零时所得到的式子完全一致。又因在稳定临界点的变位是微小的，所以可将所考虑的状态看作基准状态。于是在稳定临界点存在着十分接近的两个平衡状态。

达到稳定临界点以后，保持几何特性的变形实际上不能发生，所以假定微小变位而求决定平衡状态是不可能的。

以上理論虽可用微小应变的性质簡化，但在此不打算深入討論了。

第3章　平　板

§9　平板的变形与平衡条件

1. 平衡

将上面的一般理論，应用到服从弹性各向同性的 Hooke 定律而且由均匀材料組成的薄平板的情形。設平板在无应力状态时具有均匀的厚度 $2h$，且設想板的中央面即所謂中性平面放在 x^1, x^2 平面上。以下将取无应力状态作为基准状态 C。

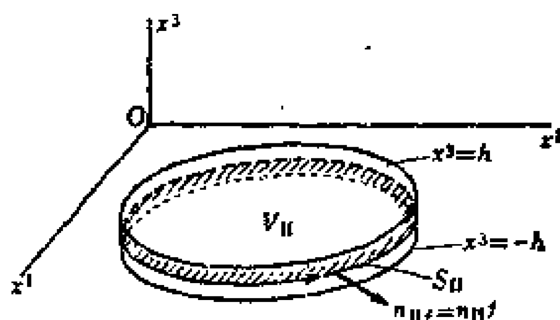


图 9.1　平板

設在基准状态时中性平面占有 x^1, x^2 平面上的区域 V_{II}，命其周界为 S_{II}。为了簡单起見，除了假設在 S_{II} 上板的 x^3 方向的变位受有强制外，不再加任何約束。在状态 C^*，平板两面 $x^3=\pm h$ 上作用的表面力只具有 x^3 方向的分量 $\mathfrak{F}^{*3}(x^1, x^2, \pm h)=\mathfrak{F}^{*3}_{\pm}(x^1, x^2)$。在平板边沿上作用的表面力及体力，由于板厚方向是均匀的，所以仅在 x^1 及 x^2 方向具有分量 $\mathfrak{F}^{*e}(x^1, x^2)$ 及 $K^{*e}(x^1, x^2)$　$(e=1, 2)$。

設发生的应变微小，且 x^3 方向的变位不很大，此时也就可将体素繞 x^3 軸的旋轉角 ω^{*3} 看作是微小的。于是变位在 x^1 及 x^2 方向的分量 u^{*e} 也是微小的。

2. 应变

平板的变位 u^{*i} 也可展成 x^3 的冪級数。板是十分薄的，所以可設变位能表示为 x^3 的一次式，而写出

$$\left.\begin{aligned}u^{*i}(x)&=\bar{u}^{*i}(x^1,x^2)+x^3v^{*i}(x^1,x^2),\\ \bar{u}^{*i}&=\bar{u}_i^*,\quad v^{*i}=v_i^*,\end{aligned}\right\}\tag{9.1}$$

$\bar{u}^{*i}$是中性平面上点的变位，v^{*i}虽不是L向量，但v^{*e}对于中性平面里的坐标变换却按照L向量的同样规律而变化。假定$\bar{u}_{e,f}^*(e,f=1,2)$也是微小的。設v^{*3}也微小，在(4.11)内代入(9.1)的u^{*i}而略去微小量，則得

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{ef}^*&=\frac{1}{2}\{\bar{u}_{e,f}^*+\bar{u}_{f,e}^*+\bar{u}_{3,e}^*\bar{u}_{3,f}^*+x^3(v_{e,f}^*+v_{f,e}^*)\},\\ \varepsilon_{3f}^*&=\varepsilon_{f3}^*=\frac{1}{2}(\bar{u}_{3,f}^*+v_f^*+x^3v_{3,f}^*),\\ \varepsilon_{33}^*&=v_3^*.\end{aligned}\right\}\tag{9.2}$$

在平板問題里ε_{3f}^*及ε_{33}^*不重要，可都設为零，卽

$$v_3^*=0,\quad v_f^*=-\bar{u}_{3,f}^*,\tag{9.3}$$

于是应变張量为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{ef}^*&=\frac{1}{2}\{\bar{u}_{e,f}^*+\bar{u}_{f,e}^*+\bar{u}_{3,e}^*\bar{u}_{3,f}^*-2x^3\bar{u}_{3,ef}^*\},\\ \varepsilon_{3f}^*&=\varepsilon_{33}^*=0.\end{aligned}\right\}\tag{9.4}$$

3. 应力应变关系

平板两面沒有表面力，所以当中性平面的点沒有x^3方向变位时，容易得知L应力張量除σ^{*ef}以外的分量都为零。此时σ^{*ef}与ε_{ef}^*間的关系由于平板是彈性各向同性的而可表示为

$$\sigma^{*ef}=E_{\text{II}}^{efgh}\varepsilon_{gh}^*\quad(e,f,g,h=1,2),\tag{9.5}$$

$$E_{\text{II}}^{efgh}E_{ghe_1f_1}=\frac{1}{2}(\delta_{ee_1}\delta_{ff_1}+\delta_{ef_1}\delta_{fe_1})$$

$$(e,f,g,h,e_1,f_1=1,2),\tag{9.6}$$

$$E_{\text{II}}^{efgh}=\frac{\nu E}{1-\nu^2}\delta_{ef}\delta_{gh}+\frac{E}{2(1+\nu)}(\delta_{eg}\delta_{fh}+\delta_{eh}\delta_{fg}).\tag{9.7}$$

在一般情形，也可假定(9.5)是 σ^{*ef} 与 ε^{*}_{ef} 的关系。此时由(9.4)可知弹性势为

$$A^{\circ}(\varepsilon^{*})=\frac{1}{2}E_{\text{II}}^{efgh}\varepsilon^{*}_{ef}\varepsilon^{*}_{gh}. \tag{9.8}$$

4. 平衡条件

导出平衡条件之前，先将 Stokes 积分定理(2.20)就平板加以改写。

設 φ^{i} 仅是 x^1 及 x^2 的函数，在 V_{II} 各处都是連續可微的。注意到 $\varphi^{i}_{;i}=\varphi^{e}_{;e}$，将(2.20)运用于平板在状态 C^* 所占的区域内，得到

$$2h\iint_{V_{\text{II}}}\varphi^{e}_{;e}\,dx^1dx^2=2h\int_{S_{\text{II}}}\varphi^{e}n_{\text{II}e}\,dS_{\text{II}}+\iint_{V_{\text{II}}}(\varphi^{3}-\varphi^{3})\,dx^1dx^2$$

或

$$\iint_{V_{\text{II}}}\varphi^{e}_{;e}\,dx^1\,dx^2=\int_{S_{\text{II}}}\varphi^{e}n_{\text{II}e}\,dS_{\text{II}}. \tag{9.9}$$

在此 $n_{\text{II}e}$ 是 x^1,x^2 平面内 S_{II} 上的外向单位法綫，且 dS_{II} 是 V_{II} 的周界 S_{II} 的微小弧长。

现在利用虚功原理(3.12)来导出平衡条件。

按假定可知对于可取变位变分有

$$\delta\bar{u}^{*}_{3}=0,\ \text{在}\ S_{\text{II}}\ \text{上。} \tag{9.10}$$

对应的应变变分 $\delta\varepsilon^{*}_{ij}$ 是

$$\left.\begin{aligned}\delta\varepsilon^{*}_{ef}=\frac{1}{2}\{&\delta\bar{u}^{*}_{e,f}+\delta\bar{u}^{*}_{f,e}+\delta\bar{u}^{*}_{3,e}\bar{v}^{*}_{3,f}\\&+\bar{v}^{*}_{3,e}\delta\bar{u}^{*}_{3,f}-2x^{3}\delta\bar{u}^{*}_{3,ef}\},\\\delta\varepsilon^{*}_{3f}=\delta\varepsilon^{*}_{33}=0.&\end{aligned}\right\} \tag{9.11}$$

于是虚功原理(3.12)变为

$$0=\iiint_V\Big[\sigma^{*ef}\frac{1}{2}\{\delta\bar{u}^*_{e,f}+\delta\bar{u}^*_{f,e}+\delta\bar{u}^*_{3,e}\bar{u}^*_{3,f}+\bar{u}^*_{3,e}\delta\bar{u}^*_{3,f}$$

$$-2x^3\delta\bar{u}^*_{3,ef}\}-\rho K^{*e}\delta u^*_e\Big]dV$$

$$-\iint_{V_{\rm II}}(\mathfrak{F}^{*3}_{+}+\mathfrak{F}^{*3}_{-})\delta\bar{u}^*_3dx^1dx^2-\int_{S_{\rm II}}\int_{-h}^{h}\mathfrak{F}^{*e}\delta u^*_e dx^3dS_{\rm II}$$

$$=\iint_{V_{\rm II}}\{N^{*ef}(\delta\bar{u}^*_{e,f}+\bar{u}^*_{3,e}\delta\bar{u}^*_{3,f})-M^{*ef}\delta\bar{u}^*_{3,ef}-2h\rho K^{*e}\delta\bar{u}^*_e\}dx^1dx^2$$

$$-\iint_{V_{\rm II}}(\mathfrak{F}^{*3}_{+}+\mathfrak{F}^{*3}_{-})\delta\bar{u}^*_3dx^1dx^2-\int_{S_{\rm II}}2h\mathfrak{F}^{*e}\delta u^*_e dS_{\rm II}$$

$$=\iint_{V_{\rm II}}[-(N^{*ef}_{,f}+2h\rho K^{*e})\delta\bar{u}^*_e$$

$$-\{(N^{*ef}\bar{u}^*_{3,e})_{,f}+M^{*ef}_{,ef}+(\mathfrak{F}^{*3}_{+}+\mathfrak{F}^{*3}_{-})\delta\bar{u}^*_3]dx^1dx^2$$

$$+\int_{S_{\rm II}}\{(N^{*ef}n_{{\rm II}f}-2h\,\mathfrak{F}^{*e})\delta\bar{u}^*_e-M^{*ef}n_{{\rm II}f}\delta\bar{u}^*_{3,e}\}dS_{\rm II},\qquad(9.12)$$

在此

$$N^{*ef}=\int_{-h}^{h}\sigma^{*ef}dx^3,\ M^{*ef}=\int_{-h}^{h}\sigma^{*ef}x^3dx^3.\qquad(9.13)$$

因为(9.12)对于任意 $\delta\bar{u}^*_e$ 都成立，所以可求得平衡条件

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}N^{*ef}_{,f}+2h\rho K^{*e}=0,\\ M^{*ef}_{,ef}+(N^{*ef}\bar{u}^*_{3,e})_{,f}+(\mathfrak{F}^{*3}_{+}+\mathfrak{F}^{*3}_{-})=0,\end{array}\right\}\text{在 }V_{\rm II}\text{ 上，}\\ \left.\begin{array}{l}N^{*ef}n_{{\rm II}f}=2h\,\mathfrak{F}^{*e},\\ M^{*ef}n_{{\rm II}f}=0,\end{array}\right\}\text{在 }S_{\rm II}\text{ 上。}\end{array}\right\}(9.14)$$

按假定，对于 $\bar{u}^*_3$ 的条件是

$$\bar{u}^*_3=0,\ \text{在 }S_{\rm II}\text{ 上。}\qquad(9.15)$$

(9.14) 及 (9.15) 是所考虑的平板的基础方程。若 $S_{\rm II}$ 上的条件和现在所考虑的情形不同，则在上述基础方程内只须适当改变 $S_{\rm II}$ 上的条件就成了。

§10 平板的压屈

1. 稳定条件

考察§9的平板不受 x^3 方向任何外力作用的情形。在发生压屈之前，平板中性平面在 x^3 軸方向无变位，所以板上的应力对于板厚方向是均匀的。于是

$$u_3^*=0, \quad N^{*ef}=2h\sigma^{*ef}, \quad M^{*ef}=0, \quad \mathfrak{F}_+^{*3}=\mathfrak{F}_-^{*3}=0.$$

基础方程为

$$\left.\begin{aligned} &N^{*ef}_{\ \ ,f}+2h\rho K^{*e}=0, \quad \text{在 } V_{\rm II} \text{ 上}, \\ &N^{*ef}\nu_{{\rm II}f}=2h\,\mathfrak{F}^{*e}, \quad \text{在 } S_{\rm II} \text{ 上。} \end{aligned}\right\} \tag{10.1}$$

其他式子自然也成立。

对于既知的 K^{*e} 及 $\mathfrak{F}^{*e}$ 求满足(10.1)的平板应力分布，这是平面弹性論的中心問題，是比較容易解決的。設已求出状态 C^* 的 N^{*ef} 或 σ^{*ef}，現在考慮稳定条件。平板具有的几何特性是其中性面为平面，从而假想发生了使中性平面弯曲的那种变形，借此导出压屈的稳定条件。

在状态 C^* 有

$$\sigma^{*3f}=\sigma^{*f3}=\sigma^{*33}=0. \tag{10.2}$$

因为变位在 x^1 及 x^2 方向的分量微小，所以利用这个事实可求出

$$\frac{1}{2}\,\sigma^{*ij}\,\delta u^*_{k,i}\,\delta u^{*k}_{,j}=\frac{1}{2}\,\sigma^{*ef}\,(\delta u^*_{g,e}\,\delta u^{*g}_{,f}+\delta u^*_{3,e}\,\delta u^*_{3,f})$$

$$=\frac{1}{2}\,\sigma^{*ef}\,\delta u^*_{3,e}\,\delta u^*_{3,f}. \tag{10.3}$$

又因 u^{*k} 微小，所以应变張量的变分由

$$\delta e^*_{ef}=\frac{1}{2}\,(\delta u^*_{e,f}+\delta u^*_{f,e})=\frac{1}{2}\,(\delta\bar{u}^*_{e,f}+\delta\bar{u}^*_{f,e})+x^3\delta\,\bar{u}^*_{3,ef} \tag{10.4}$$

給出。于是由(9.7)得

$$\int_{\Pi h}^{h} A^0(\delta\varepsilon^*)dx^3 = \frac{1}{2}2hE_{\rm II}^{efgh}\delta\bar{u}_{e,f}^*\delta\bar{u}_{g,h}^* + \frac{1}{2}\frac{2}{3}h^3E_{\rm II}^{efgh}\delta\bar{u}_{3,ef}^*\delta\bar{u}_{3,gh}^*. \qquad (10.5)$$

利用(10.3)，(10.5)，則(8.7)可表为

$$-\iint_{V_{\rm II}}\frac{1}{2}N^{*ef}\delta\bar{u}_{3,e}^*\delta\bar{u}_{3,f}^*dx^1dx^2 - \lambda\iint_{V_{\rm II}}\left(\frac{1}{2}2hE_{\rm II}^{efgh}\delta\bar{u}_{e,f}^*\delta\bar{u}_{g,h}^* + \frac{1}{2}\frac{2}{3}h^3E_{\rm II}^{efgh}\delta\bar{u}_{3,ef}^*\delta\bar{u}_{3,gh}^*\right)dx^1dx^2 = \mathrm{Max}. \qquad (10.6)$$

这个变分問題的 Euler 条件是

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}(N^{*ef}\delta\bar{u}_{3,e}^*)_{,f} - \lambda\frac{2}{3}h^3(E_{\rm II}^{efgh}\delta\bar{u}_{3,ef}^*)_{;gh} = 0,\\ \lambda 2h(E_{\rm II}^{efgh}\delta\bar{u}_{e,f}^*)_{,h} = 0,\end{array}\right\}\text{在 } V_{\rm II}\text{ 上},\\ \left.\begin{array}{l}\lambda\frac{2}{3}h^3E_{\rm II}^{efgh}\delta\bar{u}_{3,ef}^*n_{\rm II h} = 0,\\ \lambda 2hE_{\rm II}^{efgh}\delta\bar{u}_{e,f}^*n_{\rm II h} = 0,\end{array}\right\}\text{在 } S_{\rm II}\text{ 上。}\end{array}\right\} \qquad (10.7)$$

$\delta\bar{u}^*$ 必須同时滿足 (10.7) 及 (9.10)。我們要注意 (10.7) 給出了 δu_3^* 与 $\delta\bar{e}^*$ 互相独立的条件。关于 $\delta\bar{u}_e^*$ 也可由 (10.7) 的第二及第四式积分出来，得到

$$E_{\rm II}^{efgh}\delta\bar{u}_{e,f}^* = 0 \quad \text{或} \quad \delta\bar{u}_{e,f}^* + \delta\bar{u}_{f,e}^* = 0.$$

所以 $\delta\bar{u}_e^*$ 除去平行于 x^1, x^2 面的剛体运动外可完全确定。例如可設为

$$\delta\bar{u}_e^* = 0. \qquad (10.8)$$

由此指出：对于彈性压屈說来，在平板边沿的 x^1 及 x^2 方向的条件幷无任何关系。对于 $\delta\bar{u}_3^*$，利用(9.7)由(9.10)，(10.7)得

$$\left.\begin{array}{l}(N^{*ef}\delta\bar{u}_{3,e}^*)_{,f} - \lambda\frac{2}{3}h^3\frac{E}{1-\nu^2}\delta\bar{u}_{3,eegg}^* = 0,\ \text{在 } V_{\rm II}\text{ 上},\\ \left.\begin{array}{l}\frac{2}{3}h^3\left(\frac{\nu E}{1-\nu^2}\delta\bar{u}_{3,ee}^*\delta_{gh} + \frac{E}{1+\nu}\delta\bar{u}_{3,gh}^*\right)n_{\rm II h} = 0,\\ \delta\bar{u}_3^* = 0,\end{array}\right\}\text{在 } S_{\rm II}\text{ 上。}\end{array}\right\} \qquad (10.9)$$

(10.9)給出了特征值問題。命其最大特征值为 λ_{I}，则稳定临界点是 $\lambda_{\mathrm{I}}=1$。

2．受均匀压縮的矩形板

使矩形板的边平行于 x^1 及 x^2 軸，且使 V_{II} 在 x^1, x^2 面上占有区域

$$0<x^1<a,\quad 0<x^2<b,$$

其中 a, b 是矩形板的边长。該板受有 x^1 軸方向的均匀压縮，命

$$\sigma^{*11}=-p,\quad \sigma^{*ij}=0\quad (i\neq j),\quad (p>0).$$

于是
$$N^{*11}=-2ph,\quad N^{*ef}=0\quad (e\neq f).$$

在 S_{II} 的一部分 $x^1=0, a$ 上，由(10.9)的第三式得

$$n_{\mathrm{I}11}=0,\quad n_{\mathrm{I}12}=0,\quad \delta\bar{u}^*_{3,2}=0.$$

同样情形对于 $x^2=0, b$ 也成立。所以(10.9)最后变为

$$\left.\begin{aligned}
&2ph\delta\bar{u}^*_{3,11}-\lambda\frac{2h^3E}{3(1-\nu^2)}\delta\bar{u}^*_{3,eegg}=0, && 0<x^1<a,\quad 0<x^2<b;\\
&\delta\bar{u}^*_3=\delta\bar{u}^*_{3,11}=0, && x^1=0,\ a;\\
&\delta\bar{u}^*_3=\delta\bar{u}^*_{3,22}=0, && x^2=0,\ b.
\end{aligned}\right\}\quad (10.10)$$

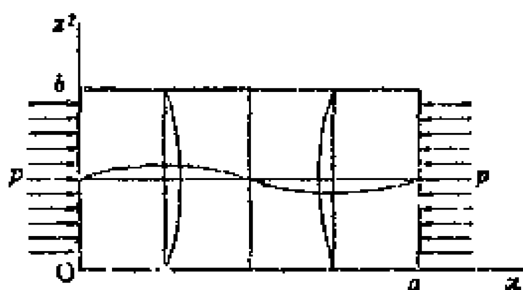


图10.1 矩形板

特征值問題(10.10)容易解决。滿足(10.10)的边界条件的可能解为

$$\delta\bar{u}^*_3=c\sin m\pi x^1/a\sin n\pi x^2/b,$$

其中 m 及 n 是正整数。对应于它的特征值是

$$\lambda=\frac{3(1-\nu^2)p}{h^2E}\frac{(m\pi/a)^2}{\{(m\pi/a)^2+(n\pi/b)^2\}^2}.$$

最大特征值 λ_{I}，由 $n=1$ 給出为

$$\lambda_{\mathrm{I}}=\frac{3(1-\nu^2)p}{h^2E}\left(\frac{b}{\pi}\right)^2\underset{m=1,2,\cdots}{\mathrm{Max}}\frac{1}{\{(mb/a)+(a/mb)\}^2}.$$

λ_{I} 的值的决定与 b/a 有关，当取 $a=b$ 时，即对于正方板有

$$\lambda_I = \frac{3(1-\nu^2)p}{h^2E}\left(\frac{b}{\pi}\right)^2\frac{1}{4}.$$

λ_I 小于 1 时是稳定的，在稳定临界点的 p 的值 p_c 可用 $\lambda_I=1$ 确定为

$$p_c = \frac{4\pi^2E}{3(1-\nu)^2}\left(\frac{h}{b}\right)^2.$$

若 p 值超过 p_c，則平板不能显示出 $\bar{u}_3^*=0$ 的那种平衡状态，平衡状态就必須按照 §9 所設有限变位的一般理論解决❶。

---

❶ 参照 K. Marguerre: Lufo., 14 (1937), 121.

参考书及文献

关于有限变位理論的优秀书籍有

[1] 小谷正雄：連續物体の力学(岩波讲座"数学"，1938).

下列各文献也都是具有一定特色的譯述：

[2] F. D. Murnagham: Amer. J. of Math., 59 (1937), 235.

[3] R. Kappus: Z. a. M. M., 19 (1939), 271, 344.

[4] A. E. Green & W. Zerna: Phil. Mag., 41 (1950), 313.

[5] V. V. Novozhilov: Foundations of Nonlinear Theory of Elasticity (Graylock, Rochester, N. Y. 1953).

[6] K. Kondo: Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Sciences by means of Geometry, I (Gakujutsu Bunken Fukyu-Kai, Tokyo, 1955) 374.

[7] C. Truesdell: J. of Rat. Mech. & Analysis, 1 (1952), 125.

(这篇論文也包含流体力学的理論，但它是一般連續体理論的綜合报告，附有詳細文献。)

下列彈性論书籍中也有关于有限变位的記述：

[8] A. E. H. Love: A Treatise on Math. Theory of Elasticity, 4th ed. (Cambridge Univ. Press, 1927).

[9] 仓西：彈性学(日本机械学会，1947).

[10] A. E. Green & W. Zerna: Theoretical Elasticity (Oxford, 1954).

作为大应变情形的有限变位的彈性論，有下列各书文：

[11] B. R. Seth: Phil. Trans. Roy. Soc. A 234 (1935), 231.

[12] W. E. Shepherd & B. R. Seth: Proc. Roy. Soc. A 156 (1936), 171.

[13] F. D. Murnagham: Finite Deformation of an Elastic Solid (John Wiley, 1951).

大应变时，在一般結构材料里产生塑性变形，所以大应变情形的彈性論应用范圍不广；产生塑性变形时，第1章的結果还可照样成立。

作为稳定条件或压屈的一般理論，有

[14] E. Trefftz: Proc. 3rd. Intern. Congr. Appl. Mech., Stockholm, 3 (1930), 44.

[15] J. N. Goodier & H. J. Plass: Quart. Appl. Math., 10 (1952), 371.

对于彈塑性体也有同样形状的稳定条件，关于这方面有

[16] Y. Yamamoto: Memoirs of the Unifying Study of the Basic Prob. in Engineering Sci. by means of Geom., I. 392.

关于协調条件的理論，由几何观点看来是个有趣的問題，在 § 6.3 所述微小变形情形下的协調条件，可参看

[17] 森口繁一：应用数学力学 I (1945)，20.

有限变位的彈性論是結合着薄壳理論而发展起来的，尽管如此，壳的有限变位的一般理論却研究得很少。这方面文献在

[18] P. M. Naghdi: Appl. Mech. Rev., 9 (1956), 365

內有詳細記載，又可参看

[19] 吉村庆丸：理工研报告，2 (1948)，167; 3 (1949)，19; 6 (1952)，157.

第1章　不完全結晶的宏观几何学

§1　近似的結晶連續体

物体由种种粒子构成，这些粒子之間相互作用的約束不同，所以可区分为固体、液体及气体等等。在固体的組成粒子間可考慮具有

(i)一定相互順序关系，

(ii)一定距离

那样的标准状态，但是在液体及气体中却不能如此。因此，我們現在就固体来叙述表示(i)及(ii)的变化，亦即变形的数学和与它有关的現象。

所謂結晶就是可看作在(i)及(ii)那种标准状态下的固体。按照粒子的格子排列所允許的規則性、对称性条件的限制，仅有三十二个結晶族相当于二百三十种空間群。它們每一个都是三維 Euclid 空間的排列，若在各格子点周圍都設想配备上一个小多面体，則具有这样一定形状及大小的多面体的整个排列，就是正常的結晶。

各个格子点及其伴隨的多面体，相互間有力学的物理的作用，所以，若存在着所謂格子缺陷，这时，不仅将其近傍粒子的番号关系打乱，而且形成了力学的、物理的异常状态，使粒子間的距离及其他关系等也都失調。在一般情形下，要想使这种不完全結晶照原样和完全結晶空間的一部分用一对一对应联系起来是困难的，所以我們不考慮一个个的粒子，而将由完全結晶充填起来的看作連續体，且将它看作 Euclid 空間，这样，由不完全結晶充填起来而

成的連續体，就不能具有 Euclid 空間的两个重要性质：

(1) **一定拓扑**，及 (2) **一定 Euclid 度量**。

所以，若想用数学方法来論述这种現象，可以形象地用下列的比例式来比喻

$$完全結晶:不完全結晶=\text{Euclid 空間}:x$$

作为其中的未知項 x，必須应用具有无数微小的 Euclid 空間要素的联絡理論的 Riemann 几何或非 Riemann 几何。

§2 解放到自然状态，非完整坐标

在不完全結晶内避开缺陷域，將不含任何缺陷的部分仔細分割出来，就可得到切离开的若干个完全結晶碎片的集。但是对于这些互相分离的碎片，不能唯一确定它們在 Euclid 連續体内所占的位置及拓扑对应。而且切离开的碎片已受不到周圍的束縛而呈現出自由的自然状态，保持着力学的最稳定的长度及形状。現在考虑这种**自然状态**，將表示其长度及角度的量叫作**自然度量**。

纵然是解放到自然状态的碎片，若让它們零散开来，可以认为它們仍然存在于 Euclid 空間内，所以將代表的物质綫素的实长及实方向用直交坐标表示时，可写为

$$(dx)^{\varkappa'},\quad \varkappa'=1,2,3.$$

若設同一綫素在分割前，封閉在不完全結晶里的状态的实长及实方向为

$$dx^{\varkappa},\quad \varkappa=1,2,3,$$

則二者之間应有綫性关系

$$(dx)^{\varkappa'}=A_{\varkappa}^{\varkappa'}dx^{\varkappa},\quad dx^{\varkappa}=A_{\varkappa'}^{\varkappa}(dx)^{\varkappa'}$$

成立。这些 $A_{\varkappa}^{\varkappa'}$ 对于切离的每个碎片是不同的，亦即为 $x^{\varkappa}$ 的任意函数，所以 $(dx)^{\varkappa'}$ 通常不是全微分。也就是說，綫性微分型 $(dx)^{\varkappa'}$ 不能积分。若想用解析方式表示出来，就是所謂**非完整物**

$$\Omega^{\varkappa'}_{\mu'\lambda'} \overset{\mathrm{d}}{=} A^{\mu}_{[\mu'} A^{\lambda}_{\lambda']} \frac{\partial A^{\varkappa'}_{\lambda}}{\partial x^{\mu}} \tag{2.1}$$ [1]

不能全部为零。此时，将原来不完全結晶充填而得的連續体，在联結起来的情况下，沒有理由算作 Euclid 空間里的实現，因此

$$x^{\varkappa},\quad \varkappa=1,2,3$$

是所謂**眞坐标**，坐标系$(\varkappa)$叫作**完整的**。与此相反，$(dx)^{\varkappa'}$ 叫作**伪坐标**，坐标系$(\varkappa')$叫作**非完整的**。坐标系$(\varkappa')$应該具有不为零的非完整物 $\Omega^{\varkappa'}_{\mu'\lambda'}$，若非完整物全部为零，則$(\varkappa')$就变为完整系了。

命眞坐标$(\varkappa)$是任意曲綫坐标，(i)表示直交坐标系，則綫素的实长在解放前后，按照商高定律（Pythagoras 定理）可分别用下列两个二阶微分型

$$ds^2_E = g_{E\varkappa\lambda}\, dx^{\varkappa} dx^{\lambda} = \delta_{ij}\, dx^i dx^j \tag{2.2}$$

及

$$ds^2_N = g_{N\varkappa\lambda}\, dx^{\varkappa} dx^{\lambda} = \delta_{\varkappa'\lambda'} (dx)^{\varkappa'} (dx)^{\lambda'} \tag{2.3}$$

給出。这里 δ_{ij} 及 $\delta_{\varkappa'\lambda'}$ 都是 Kronecker δ，对于重复标数已采用 Einstein 总和規約而略去 Σ。在此

$$g_{E\varkappa\lambda} \overset{\mathrm{d}}{=} \delta_{ij} A^i_{\varkappa} A^j_{\lambda}$$

及

$$g_{N\varkappa\lambda} \overset{\mathrm{d}}{=} \delta_{\varkappa'\lambda'} A^{\varkappa'}_{\varkappa} A^{\lambda'}_{\lambda}.$$

可想象 $A^{\varkappa'}_{\varkappa}$ 具有各种可能数值的九个分量，但是由于 $g_{N\varkappa\lambda}$ 的对称性 $g_{N\varkappa\lambda}=g_{N\lambda\varkappa}$，它必仅有六个自由度。所以只要$(\varkappa)$是三維 Euclid 空間的坐标，則在結晶內一般不可能对所有点同时使

$$g_{N\varkappa\lambda} = \delta_{\varkappa\lambda}. \tag{2.4}$$

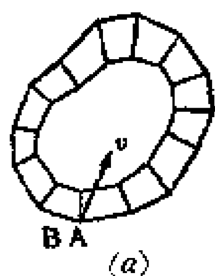
§3 錯位張量

在不完全結晶內避开缺陷域，且按照图 3.1(a) 的样子联結起

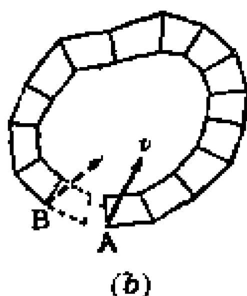
---

[1] $\overset{\mathrm{d}}{=}$ 表示右侧是左側的定义，[…]表示将其中的标数作交代变化而成的交代量，例如此时 $=\frac{1}{2} A^{\mu}_{\mu'} A^{\lambda}_{\lambda'} \left(\frac{\partial A^{\varkappa'}_{\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial A^{\varkappa'}_{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\right)$，参看(3.1)。

来的碎片，若解放到自然状态去，再将每个碎片嵌回到 Euclid 空間里而得到一个图形，命为(b)。从这种方法决定的若干成对的图形里，姑且挑选一对当作代表而进行考察。在(a)内联結着的A与B，它們在(b)内大多都分离开如图。这种“不对口现象”是由于該曲綫内所含某种缺陷的張量和的总量所致，所以若取該閉曲綫素充分小，則表示这个缺陷密度的張量与閉曲綫所包圍的面积成比例。若命該面素的大小为$2d\sigma$，表示单位面积方向性的張量为$f^{\mu\nu}$，則不对口向量由



(a)

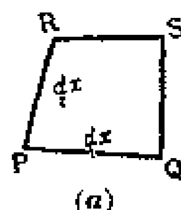


(b)

图　3.1

$$\Delta x^{\varkappa'}=2d\sigma f^{\mu\lambda}Z_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa'}$$

給出。$\Delta x^{\varkappa'}$是向量，$f^{\mu\nu}$是張量，这些都具有几何学的不变意义；所以由商律可知$Z_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa'}$也必須为一个張量，叫作**錯位挠率張量**或簡称**錯位張量**。在不完全結晶学中所謂“錯位”，就是指的这个張量所表示的缺陷(参照 §5)。



(a)

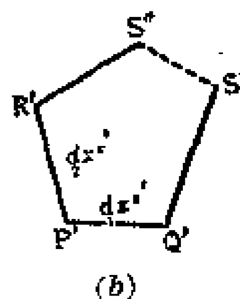
将所有張量都仅用$(\varkappa')$写出时，則有

$$\Delta x^{\varkappa'}=2\,d\sigma\,f^{\mu'\lambda'}Z_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\varkappa'},$$

但

$$f^{\mu'\lambda'}=A_{\mu}^{\mu'}A_{\lambda}^{\lambda'}f^{\mu\lambda},\quad Z_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\varkappa'}=A_{\mu'}^{\mu}A_{\lambda'}^{\lambda}Z_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa'}.$$

特別地，对于以綫素$PQ:\underset{1}{dx^{\varkappa}}$及綫素$PR:\underset{2}{dx^{\varkappa}}$为二边的平行四边形$PQSR$作考察[图3.2$(a)$]时，其大小及方向可表示为向量积



(b)

图　3.2

$$2\sigma f^{\mu\lambda}=2\underset{[1}{dx^{\mu}}\underset{2]}{dx^{\lambda}}=2\underset{1}{dx}^{[\mu}\underset{2}{dx}^{\lambda]}\overset{\mathrm{d}}{=}\underset{1}{dx^{\mu}}\underset{2}{dx^{\lambda}}-\underset{2}{dx^{\mu}}\underset{1}{dx^{\lambda}}.\qquad(3.1)$$

若命P,Q,R的解放象点为P',Q',R'，其$(\varkappa')$坐标差各为

$$\overline{P'Q'}: \underset{1}{(dx)}^{\varkappa'},\quad \overline{P'R'}: \underset{2}{(dx)}^{\varkappa'},$$

则 S 的解放象点随着它归属于 PQS 或归属于 PRS 的不同，分别成为

$$\overline{P'Q'S'}:\quad \underset{1}{(dx)}^{\varkappa'} + \underset{2}{(dx)}^{\varkappa'} + \underset{1}{d}\underset{2}{(dx)}^{\varkappa'},$$

$$\overline{P'R'S''}:\quad \underset{2}{(dx)}^{\varkappa'} + \underset{1}{(dx)}^{\varkappa'} + \underset{2}{d}\underset{1}{(dx)}^{\varkappa'}.$$

于是不对口向量 $\overline{S'S''}$ 为

$$\begin{aligned}\overline{S'S''}:\quad \underset{2}{d}\underset{1}{(dx)}^{\varkappa'} - \underset{1}{d}\underset{2}{(dx)}^{\varkappa'} &= \underset{2}{dx}^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\underset{1}{dx}^{\lambda}A_{\lambda}^{\varkappa'}) \\ &\quad - \underset{1}{dx}^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\underset{2}{dx}^{\lambda}A_{\lambda}^{\varkappa'}) \\ &= \underset{2}{dx}^{\mu}\underset{1}{dx}^{\lambda}\left(\frac{\partial A_{\lambda}^{\varkappa'}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}^{\varkappa'}}{\partial x^{\lambda}}\right) \\ &= 2\underset{2}{dx}^{[\mu'}\underset{1}{dx}^{\lambda']}\Omega_{\mu'\lambda'}^{\varkappa'}.\end{aligned}$$

所以至少对于 $(\varkappa')$ 可得

$$Z_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\varkappa'} \overset{*}{=} -\Omega_{\mu'\lambda'}^{\varkappa'}, \tag{3.2}$$ ①

$\Omega_{\mu'\lambda'}^{\varkappa'}$ 对于 μ' 及 λ' 是反对称的，所以 $Z_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\varkappa'}$ 对于下标也是反对称的。

若对于直交坐标 (i)，使

$$Z_{ji}^{\cdot\cdot\varkappa'} = -\partial_{[j}A_{i]}^{\varkappa'}$$

的标数 $\varkappa'$ 保持一定，而且将 $Z_{ji}^{\cdot\cdot\varkappa'}(ji=32,\ 13,\ 21)$ 各写为 $C^{\varkappa'}(C_1^{\varkappa'},\ C_2^{\varkappa'},\ C_3^{\varkappa'})$，则场

$$'\boldsymbol{C}^{\varkappa'} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}^{\varkappa} \qquad (\boldsymbol{A}^{\varkappa'}:\ A_i^{\varkappa'})$$

是无散度的，即

$$\operatorname{div} C^{\varkappa'} \equiv \frac{\partial C_1^{\varkappa'}}{\partial x^1} + \frac{\partial C_2^{\varkappa'}}{\partial x^2} + \frac{\partial C_3^{\varkappa'}}{\partial x^3} = 0.$$

亦即，错位场是连续的（在境界面以外的有限域是无端的）。

---

① $\overset{*}{=}$ 表示对于特定坐标系成立的等式.

§4 拟平行性，撓率及 Riemann-Christoffel 曲率

再回到图 3.1，考虑点 A 及点 B 处方向的平行和非平行問題。若将 (a) 及 (b) 分开討論，什么疑問也不会发生；但若将 (b) 里 A 及 B 的平行向量 $\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{v}'$ 返回到 (a) 时，該两向量通常不能一致[图 4.1(a) 及 (b)]。这样，对应于 (b) 里普通意义的平行性，在 (a) 内可定义沿着碎片两端的向量相对应的一个法則，这个法則就叫作**拟平行性**。沿着閉曲綫使向量拟平行移动一周，通常要改变方向。換句話說，在閉曲綫上切离开的点，随着将同一物质綫素 $\boldsymbol{P}$ 附属于点 A 或是附属于点 B 而应該选取不同的方向。

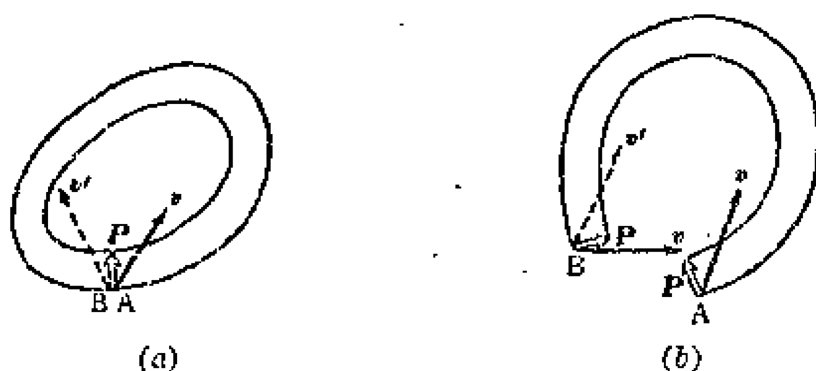


图 4.1

若命該物质閉曲綫非常小，就可将这个不对口向量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 也看作是和閉曲綫所包圍的面积成比例的，所以这个向量必須写成

$$\Delta\boldsymbol{v}:\ \Delta v^{\kappa'}=d\sigma f^{\nu'\mu'}R_{\nu'\mu'\lambda'}^{\ \ \ \ \ \kappa'}v^{\lambda'}.$$

$v^{\kappa'}$，$\Delta v^{\kappa'}$，$d\sigma f^{\nu'\mu'}$ 都表示向量或張量，亦即具有几何学不变意义的張量，所以按照商律可知 $R_{\nu'\mu'\lambda'}^{\ \ \ \ \ \kappa'}$ 也是張量，叫作 **Riemann-Christoffel 曲率張量**。

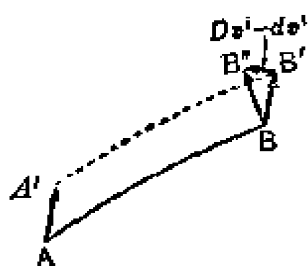


图 4.2

在向量 $\boldsymbol{v}$ 沿着图 4.2 的綫素 dx^{κ} 作拟平行移动的情形以及作普通平行移动的情形下，$\boldsymbol{v}$ 末端的不对口向量与 v^{κ} 成比例，也可看作与所經过的路綫 dx^{κ} 成比例，所以它将要取

$$dx^{\mu}\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}v^{\lambda}$$

的形状。于是，对于直綫坐标，$dv^i=0$ 就是普通平行移动的条件 $(\overline{AA'}\to\overline{BB'})$，而拟平行条件 $(\overline{AA'}\to\overline{BB'})$ 则为

$$dv^i+dx^k\Gamma^i_{kj}v^j=0,$$

对于一般坐标则是

$$Dv^{\varkappa}\overset{\mathrm{d}}{=}dv^{\varkappa}+dx^{\mu}\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}v^{\lambda}=0. \tag{4.1}$$

$\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}$ 叫作**伪射联絡系数**。

$Dv^{\varkappa}$ 叫作逆变向量 $v^{\varkappa}$ 的**絕对微分或协变微分**，而称

$$\nabla_{\mu}v^{\varkappa}\overset{\mathrm{d}}{=}\frac{\partial v^{\varkappa}}{\partial x^{\mu}}+\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}v^{\lambda}$$

为**絕对或协变微分系数**，它是張量。协变向量及高阶張量的絕对微分可同样定义，也含有 $\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}$。

联絡条件由缺陷分布所决定，是与坐标无关的一个概念，所以在坐标系 $(\varkappa')$ 里也必定有

$$Dv^{\varkappa'}\overset{\mathrm{d}}{=}dv^{\varkappa'}+(dx)^{\mu'}\Gamma^{\varkappa'}_{\mu'\lambda'}v^{\lambda'}=0. \tag{4.2}$$

由 $$v^{\varkappa'}=A^{\varkappa'}_{\varkappa}v^{\varkappa},\quad (dx)^{\mu'}=A^{\mu'}_{\mu}dx^{\mu},$$

容易求得联絡系数的变换式

$$\Gamma^{\varkappa'}_{\mu'\lambda'}=A^{\varkappa'}_{\varkappa}A^{\mu}_{\mu'}A^{\lambda}_{\lambda'}\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}-A^{\mu}_{\mu'}A^{\lambda}_{\lambda'}\frac{\partial A^{\varkappa'}_{\lambda}}{\partial x^{\mu}}. \tag{4.3}$$

因为在右侧有第二项，所以 $\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}$ 不能满足張量所要求的变换律。但是因为关于两下标反对称的部分含有(2.1)的非完整物，所以按照

$$\Omega^{\varkappa'}_{\mu'\lambda'}+\Gamma^{\varkappa'}_{[\mu'\lambda']}=A^{\varkappa'}_{\varkappa}A^{\mu}_{\mu'}A^{\lambda}_{\lambda'}\Gamma^{\varkappa}_{[\mu\lambda]}$$

而变换。对于完整系 $(\varkappa)$ 有

$$\Omega^{\varkappa}_{\mu\lambda}=0,$$

所以写成

$$S_{\mu'\lambda'}{}^{\varkappa'}\overset{\mathrm{d}}{=}\Omega^{\varkappa'}_{\mu'\lambda'}+\Gamma^{\varkappa'}_{[\mu'\lambda']},\quad S_{\mu\lambda}{}^{\varkappa}\overset{\mathrm{d}}{=}\Omega^{\varkappa}_{\mu\lambda}+\Gamma^{\varkappa}_{[\mu\lambda]}\overset{(\varkappa)}{=}\Gamma^{\varkappa}_{[\mu\lambda]} \tag{4.4}$$ [1]

---

[1] $\overset{(\varkappa)}{=}$ 表示在坐标系 $(\varkappa)$ 成立的等式。

时，恒有

$$S_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\varkappa'} = A_{\varkappa}^{\varkappa'} A_{\mu'}^{\mu} A_{\lambda'}^{\lambda} S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$$

成立。即 $S_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\varkappa'}$ 是一个張量，叫作 **Schouten 撓率張量。**

当联絡系数的反对称部分消失时，撓率張量与錯位張量除符号外必定一致。

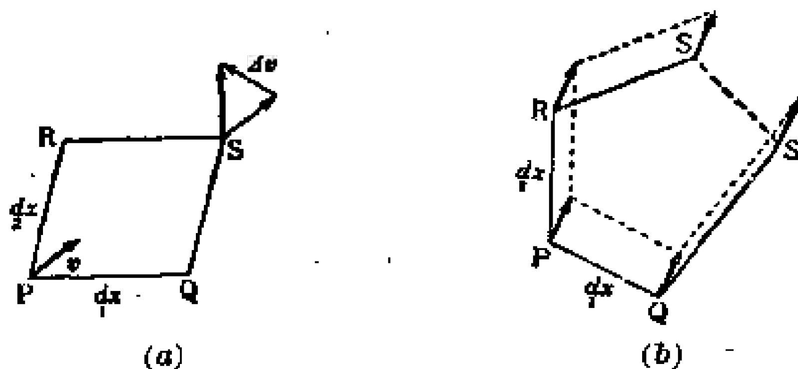


图 4.3

对于微小平行四边形 $PQSR$ [图 4.3(a), (b)]，我們用不对口向量

$$\underset{2}{D}(\underset{1}{D}v^{\varkappa}) - \underset{1}{D}(\underset{2}{D}v^{\varkappa})$$

定义 Riemann-Christoffel 曲率，計算后得

$$\Delta v^{\varkappa} = \underset{1}{dx^{\mu}}\,\underset{2}{dx^{\nu}} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} v^{\lambda}, \quad \Delta v^{\varkappa'} = (\underset{1}{dx})^{\mu'} (\underset{2}{dx})^{\nu'} R_{\nu'\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa'} v^{\lambda'}.$$

但
$$R_{\nu'\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa'} = 2\partial_{[\nu'} \Gamma_{\mu']\lambda'}^{\varkappa'} + 2\Gamma_{[\nu'|\rho'|}^{\varkappa'} \Gamma_{\mu']\lambda'}^{\rho'} + 2\Omega_{\nu'\mu'}^{\rho'} \Gamma_{\rho'\lambda'}^{\varkappa'}, \qquad (4.5)$$

在此
$$\partial_{\nu'} = A_{\nu'}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}.$$

§5 与錯位論的对应

錯位撓率張量关于两下标数是反对称的，将其分量分类时，則除

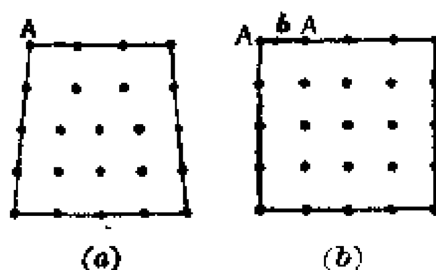
(i) $Z_{12}^{\cdot\cdot 3}$, (ii) $Z_{12}^{\cdot\cdot 3}$

及本质上和它們同性质的分量以外，其余的都是零，对应于(i)及

(ii)的不对口现象，各表示为图 5.1 的 (a) 及 (b)，按其形状分别叫作**刃状錯位**及**螺状錯位**。这些名称起源于格子构造，是在不完全結晶理論里常用的名詞。我們現在将图 5.2(a) 那种缺陷，映写在 5.2(b) 所表示的正常格子上，再来考慮它的图象。黑細綫所成的閉路叫作 **Burgers 閉路**，黑粗綫所表示的不对口向量 b 叫作 **Burgers 向量**[1]。仿照 Burgers 的作法，沿着格子点作簡单考察时，除了刃状錯位及螺状錯位外，不会再有其他情形。


(a) (b)

图 5.1



(a) (b)

图 5.2

在我們的微分几何的表象里，都是将缺陷涂抹充填好了的，所以錯位撓率并不表示单个独立的錯位，而表示 $f^{\mu\lambda}$ 的面上所分布的錯位密度，且用几何学的語言应該能完全一般地表达出来。特别地，比較前面所述的公式，不难得到 $-S_{\mu'\lambda'}^{\ \ \ \kappa'}$ 与 $Z_{\mu'\lambda'}^{\ \ \ \kappa'}$ 一致的条件，这时几何学用語也就特别簡单，只需将錯位看作撓率就成了。

这个条件 $\Gamma_{[\mu'\lambda']}^{\kappa'}=0$ 就等于这样来思考：使原来的不完全結晶——图 5.2 (a) 的状态——里的碎片作非完整的移动，让各碎片作适当的相互不連續的变形移动，将缺陷域完全弥补起来——图 5.2(b) 的状态——而形成无間隙的完全結晶。这样，与其将 (κ) 看作完整的眞坐标，就不如将 (κ') 看作完整的眞坐标了。因为这是在 Euclid 空間里的实現，所以平行移动法则是普通 Euclid 的；(κ') 是普通曲綫坐标，$\Gamma_{\mu'\lambda'}^{\kappa'}$ 是对称的，故必有 $\Gamma_{[\mu'\lambda']}^{\kappa'}=0$ $(\Gamma_{\mu'\lambda'}^{\kappa'}=\{{}_{\mu'\lambda'}^{\kappa'}\}$，参閱 §6, §7)。将这样联絡方式变回到 (a) 的状态，则 $\Gamma_{[\mu\lambda]}^{\kappa}$ 不必为零，于是由 (4.4) 得

$$Z_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa}=-S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa}\stackrel{*}{=}A_{\kappa'}^{\kappa}A_{\mu}^{\mu'}A_{\lambda}^{\lambda'}\Omega_{\mu'\lambda'}^{\kappa'}. \tag{5.1}$$

这便是"在解放前后虽不必一样，但它們每一种都是 Euclid 空間里恰当的实現"这样一个假定。

錯位的理論在近代金属物理学、不完全結晶学及塑性变形理論中获得了惊人的成果。这里除了 J. M. Burgers 首先作出了重要的貢献以外，据說在英国完成了主要的进展。最近由英国学者 B. A. Bilby想出了用微分几何中的撓率来解釋錯位的方法[2]，德国的 E. Kröner 也发表了同样的见解[3]。但是他們对(5.1)解釋时，暗地引入了向量的拟平行性与移动路綫无关的假設。因此他們所考慮的背景空間，实际就是只有撓率而无 Riemann-Christoffel 曲率的所謂**远平行性空間**。Einstein 曾在統一場論里試作过这种空間，从那里来看，多少有些幽玄迷惑之感。但由本书的观点看来，这部分的理論也还未能闡述完尽。

在日本，很早已独立地进行了"材料屈服理論"的研究[4,5,6,7]，进而研究了結晶体与曲率相当的不完全性，从而批判了认为錯位就是非完整撓率概念的想法。关于这方面，我們将在下一节进一步讲述其物理意义。

§6 度量缺陷与 Riemann-Christoffel 曲率

通常所考慮的格子缺陷有

(i) 声子，　(ii) 电子，空洞，

(iii) 激子，　(iv) 杂质，异质分子，

(v) 格子缺損，格子間原子，　(vi) 錯位。

除去純物理的(ii)及(iii)外，其余几个都有相当的几何意义。(i)便是声音，即彈性伸縮的异常，(iv)及(v)是由于异常大的粒子嵌入在正常位置中，或是从正常位置上把粒子除去而引起的度量上的变化。(vi)由前节所述，显然是拓扑的缺陷。

例如，由于大粒异分子存在，周圍被挤压而又保持平衡的情形，若将它由异分子解放出来而使它能够伸縮自如时，則在原来异分子所占地位的周圍，物质碎片将拥挤过来。既使在全部应变发生的情形下，这些碎片也不見得能接合得很好而全部吻合。所以，若設这种碎片的自然度量是 $ds_N^2 = g_{N\kappa\lambda}\,dx^\kappa\,dx^\lambda$ 时，通常也不可能在結晶内对所有点同时使(2.4)成立。

沒有錯位而只有度量缺陷情形的理論，是仅用真坐标而記述

的二阶微分型 ds_N^2 的不变式論，即所謂 Riemann 几何学。这种理論的对象——只有度量缺陷的不完全結晶，譯成几何学的語言就是 Riemann 空間的拟平行性——叫作“Levi-Civita 平行性”，其联絡系数就是所謂第二种 Christoffel 三标記号

$$\left\{ {\varkappa \atop \mu\lambda} \right\} = \frac{1}{2} g_N^{\varkappa\rho} \left(\frac{\partial g_{N\lambda\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{N\rho\mu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{N\mu\lambda}}{\partial x^\rho} \right) \tag{6.1}$$

(但 $g_N^{\varkappa\rho} g_{N\rho\lambda} = g_{N\lambda\rho} g_N^{\rho\varkappa} = \delta_\lambda^\varkappa$)。其 Riemann-Christoffel 曲率張量是

$$R_{\nu\mu\lambda}^{\cdots\varkappa} = \frac{\partial \left\{ {\varkappa \atop \mu\lambda} \right\}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \left\{ {\varkappa \atop \nu\lambda} \right\}}{\partial x^\mu} + \left\{ {\varkappa \atop \nu\rho} \right\} \left\{ {\rho \atop \mu\lambda} \right\} - \left\{ {\varkappa \atop \mu\rho} \right\} \left\{ {\rho \atop \nu\lambda} \right\}. \tag{6.2}$$

在另一方面，远平行性条件(Bilby 条件)是

$$R_{\nu'\mu'\lambda'}^{\cdots\varkappa'} = 0,$$

于是也有

$$R_{\nu\mu\lambda}^{\cdots\varkappa} = 0.$$

这便是在仅和 $g_{N\varkappa\lambda}$ 的二阶偏导微有关的范圍內，这个非 Riemann 空間与 Euclid 空間等价的充要条件。

所以在一般情形，和 Riemann-Christoffel 曲率張量成比例的不对口向量——§4 的 $\Delta v^\varkappa$——含有小域錯位 $Z_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$ 以外的东西，我們将称之为 **Riemann-Christoffel 曲率的不完全性或度量缺陷**[1]。这是与捩率缺陷（錯位）比較在較大域尺度上成立的概念，可例証如下。

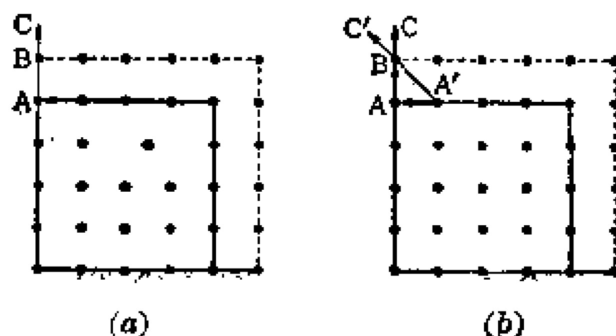


图 6.1

在图 6.1 的 Burgers 閉路（細实綫）以外，再考虑用虛綫表示的另一条閉路。若使不完全結晶 (a) 上的两条閉路上的粒子，按照完全結晶格子 (b) 上的顺序写下来，

---

[1] 在 §8 将叙述这两种缺陷的保存律及适應条件。

则細实綫閉路的 Burgers 向量是 $\overline{A'A}$，虛綫閉路上的 Burgers 向量是零向量。所以虛綫閉路所含錯位之差的总和为零。在另一方面，向量 $\overline{ABC}$ 在閉路两端映成 $\overline{ABC}$ 及 $\overline{A'BC'}$，两者是不一致的，这和撓率为零而 Riemann-Christoffel 曲率不为零的情形相当。

同样事情也可用連續图象說明。考慮图 6.2(a) 的細实閉曲綫上 A 点所附着的結晶物质綫素的向量 $\overline{AB}$。設想通过它的端点且在細实閉路以外再作一个虛綫表示的（物质）閉路綫，若将这两閉路間的物质从周围物质解放开，而更沿着 AB 切离时，通常得到(b)图。但在特殊情形，A 的象 A' 和 A'' 可以相重合，此时如(c)图，而象 B' 和 B'' 不必一致。也就是說，在閉路两端的物质綫素 $\overline{AB}$ 的象方向不同。与此相反，$\overline{A'B'}$ 和 $\overline{A''B''}$ 也可能平行，如图(d)所示，但通常 A' 与 A'' 也不一定相重合。图(c)表示撓率为零而仅有 Riemann-Christoffel 曲率的情形；图(d)表示仅有撓率的情形。按照錯位分布的观点看来，(c) 是小閉路(細实綫)内看不到錯位的影响，而取在大閉路(虛綫)时却能看到的情形。

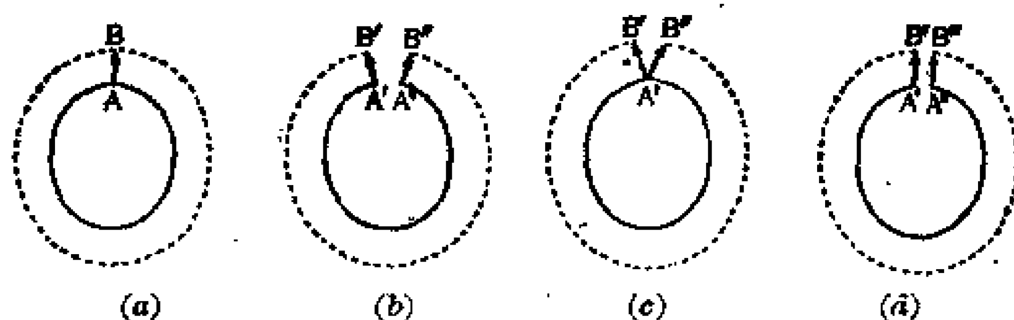


图 6.2

参考了这些結論就可以了解，与小域缺陷理論相当的錯位論，仅是关于連續体的近似反映而已。不能够从而得到錯位以及它周圍場的全部条件。

第2章 不协調彈性論

§7 协調条件

彈性就是所謂"变形物体"的应变与应力間所假定的一对一关系。許多物质都至少近似地显示出这个性质。若变形太大，則和彈性法則的偏差当然也就更显著。具有此性质的完全物体叫作彈性体。

若給彈性体加上外力（外来荷載），就发生和它相当的一定应变，而保持某种变形状态；但若取去外力（严密地說来，是由外力产生的应力），則所生的应变也隨之消失。这样看法可解釋为："以物体碎片間联結关系（物体的拓扑几何学的特性）的守恒为前提，而将物体各碎片間的距离变化和对于这个变化的抵抗間的一对一对应关系，相应地延拓到外力与应变的关系上去"。若在变形时碎片間的联結关系有所改变，其分子原子間的力学作用也隨之而变的話，这样就談不上彈性了。所以彈性变形属于使联結性守恒的且在普通空間內得以实行的那种变形。这种变形叫作协調的。

必須注意彈性就以拓扑不变性为前提的这个事实。按前章的观点看来，在各格子点正規配置上的分子原子，虽可改变相互距离，但却不能互相替換或滑錯。

因为实数恰好具有适用的連續性，所以就将协調变形的实变位用对于直交坐标 x, y, z 的三个分量 u, v, w 表示。于是微小应变的六个分量是

$$\begin{cases} e_{xx}=\dfrac{\partial u}{\partial x}, & e_{yy}=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{zz}=\dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ e_{yz}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\right), & e_{zx}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\right), \\ e_{xy}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right). \end{cases}$$

由此消去 u, v, w 而得到的

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2}=2\frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y\partial z}, \\ &\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right), \\ &\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2}=2\frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z\partial x}, \\ &\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right), \\ &\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}=2\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\partial y}, \\ &\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right) \end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

是任何古典教本里都有的所謂协調条件。

对于有限变形的协調条件,它是根据这样的假定,即变形前后任意物质綫素 dx^κ 的度量

$$ds_1^2=g_{1\kappa\lambda}\,dx^\kappa\,dx^\lambda, \quad ds_2^2=g_{2\kappa\lambda}\,dx^\kappa\,dx^\lambda$$

都是 Euclid 度量,然后用一般的形状表示出来而得到的条件。因此度量張量 $g_{1\kappa\lambda}$ 及 $g_{2\kappa\lambda}$ 或者由它們作出的三标記号

$$\begin{Bmatrix}\kappa\\ \mu\lambda\end{Bmatrix}_1=\frac{1}{2}g_1^{\kappa\rho}\left(\frac{\partial g_{1\lambda\rho}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial g_{1\rho\mu}}{\partial x^\lambda}-\frac{\partial g_{1\mu\lambda}}{\partial x^\rho}\right),$$

$$\begin{Bmatrix}\kappa\\ \mu\lambda\end{Bmatrix}_2=\frac{1}{2}g_2^{\kappa\rho}\left(\frac{\partial g_{2\lambda\rho}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial g_{2\rho\mu}}{\partial x^\lambda}-\frac{\partial g_{2\mu\lambda}}{\partial x^\rho}\right)$$

所对应的 Riemann–Christoffel 曲率張量等于零:

$$\left.\begin{aligned}
R_{1\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=&\frac{\partial\begin{Bmatrix}\kappa\\ \mu\lambda\end{Bmatrix}_1}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial\begin{Bmatrix}\kappa\\ \nu\lambda\end{Bmatrix}_1}{\partial x^{\mu}}\\
&-\begin{Bmatrix}\kappa\\ \nu\rho\end{Bmatrix}_1\begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\lambda\end{Bmatrix}_1+\begin{Bmatrix}\kappa\\ \mu\rho\end{Bmatrix}_1\begin{Bmatrix}\rho\\ \nu\lambda\end{Bmatrix}_1=0,\\
R_{2\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=&\frac{\partial\begin{Bmatrix}\kappa\\ \mu\lambda\end{Bmatrix}_2}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial\begin{Bmatrix}\kappa\\ \nu\lambda\end{Bmatrix}_2}{\partial x^{\mu}}\\
&-\begin{Bmatrix}\kappa\\ \nu\rho\end{Bmatrix}_2\begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\lambda\end{Bmatrix}_2+\begin{Bmatrix}\kappa\\ \mu\rho\end{Bmatrix}_2\begin{Bmatrix}\rho\\ \nu\lambda\end{Bmatrix}_2=0.
\end{aligned}\right\}\tag{7.2}$$

若写出它的协变分量(略去标数 1, 2)，则为

$$\begin{aligned}
&R_{\nu\mu\lambda\kappa}\left(\stackrel{\Delta}{=}g_{\kappa\rho}R_{\nu\mu\lambda}{}^{\rho}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\kappa}}-\frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\kappa}}-\frac{\partial^2 g_{\nu\kappa}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}}\right)\\
&\quad-g^{\rho\sigma}\left([\mu\nu,\rho][\sigma\mu,\kappa]-[\mu\lambda,\rho][\sigma\nu,\kappa]\right).
\end{aligned}\tag{7.3}$$

应变可以用度量基本型的差

$$ds_2^2-ds_1^2=(g_{2\kappa\lambda}-g_{1\kappa\lambda})dx^{\kappa}dx^{\lambda}$$

的系数

$$\varepsilon_{\kappa\lambda}\stackrel{\Delta}{=}\frac{1}{2}(g_{2\kappa\lambda}-g_{1\kappa\lambda})\tag{7.4}$$

来表示。$\varepsilon_{\kappa\lambda}$ 是一个张量。若将变形前的线素用直交坐标(i)表示为 $dx^i(\stackrel{\Delta}{=}d_1x^i)$，则有 $g_{1ij}=\delta_{ij}$。从而 $x^i(i=1,2,3)$ 分别就是 x, y, z。于是可知在微小应变的情形，

$$\varepsilon_{ij}\stackrel{(i)}{=}\frac{1}{2}(g_{2ij}-g_{1ij})\tag{7.5}$$

❶

与 $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \cdots$ 等完全一致。这些用不着再説明了。实际上，将 ε_{ij} 及其偏导数的二阶和高阶各项略去后，能得到

$$(R_{2hkji}=)\frac{\partial^2\varepsilon_{hi}}{\partial x^k\partial x^j}+\frac{\partial^2\varepsilon_{jk}}{\partial x^h\partial x^i}-\frac{\partial^2\varepsilon_{hj}}{\partial x^k\partial x^i}-\frac{\partial^2\varepsilon_{ki}}{\partial x^h\partial x^j}=0$$

❶ $\stackrel{(i)}{=}$ 表示仅在坐标系(i)成立的等式。

这义和(7.1)完全相同。

上述 dx^κ(特别是 dx^i)是物质綫素，所以 x^κ (特别是 x^i)是在物质点固定起来的坐标，就是所謂 Lagrange 参数。与此相反，具有 ds_2^2 所表示的度量的状态，是对应于应力的变形发生后实际上得到的状态，叫作 **Euler 状态**，其度量叫作 **Euler 度量**。作为 Lagrange 参数我們可采用上面所說的 x^i. 在这个意义下，也可以把 ds_1^2 所表示的度量叫作 **Lagrange 度量**。

不論最后变形的大小如何，我們恒可将协調条件理解为**用 Lagrange 坐标表示的 Euler 状态里 Riemann-Christoffel 曲率为零的条件**。

§8 不协調度[9,10,11]

Euler 状态永远是 Euclid 的，而 Lagrange 度量必須是 Euclid 的这一限制可以去掉。

按定义，若去掉外力，则仅仅去掉了和同时去掉的应力相当的应变，而外力的原点和应力或应变的原点却不需要一致。例如将橡胶半球壳翻轉后，虽然翻轉时所作用的外力可完全去掉，而壳却仍然保持着翻过来的状态，这就显然表明还有某些应力分布殘留着。又不加任何外力而只用温度分布的变化也可引起热应力。通常由于热处理而产生和外力无关的內部应变及內部应力的情形也很多。将这种状态的物体切离开而使它得到解放时，各碎片便变形而达到自由状态(无应变无应力状态)。

借助于分成碎片才能达到自然状态的物体，在解放后已經不再保有分割前的联結特性(拓扑)，所以它已超出协調变形論的范圍。在§6所述具有度量缺陷的物质流形，显然就相当于这种情形。这个自然度量是 Riemann 度量，因为具有非零的曲率張量 $R_{\kappa\nu\mu}{}^{\lambda}$，亦即有在协調变形里不能去掉的应变。这种应变叫作固

有应变，和它对应的应力叫作**固有应力**。所以将自然状态的 Riemann-Christoffel 曲率张量看作**不协調度**的表现是很适当的。

Lagrange 坐标仅是一种任意的識别参数，不必表示現实空間里的位置。同理，Lagrange 度量也无必要表示在現实 Euclid 空間里可以实現的东西，所以将自然状态的 Riemann 度量取作 Lagrange 度量也沒有关系。

我們也可以选取任意变形状态里位置的 Euler 坐标作为物质点的識别参数，前节的 x^i 就是一例。不仅如此，不管 Euler 状态如何，自然状态（Lagrange 状态）也是不变的，所以变形不是别的而正是 Euler 坐标变换。于是，**把 Euler 真坐标变换的 Riemann 度量的不变式論—— Riemann 几何学——看作固有变形的彈性論**，这样的看法是可以的。

不协調度的有趣性质就是它的**保存律**及**連續性**。前者意味着用协調变形不能将它取消，也不能把它从新作出来，这从 Riemann-Christoffel 曲率是自然状态的不变量就可以明显地看出来；后者是由所謂 Bianchi 恒等式的一般公式

$$\nabla_\rho R_{\sigma\tau j}{}^{i}+\nabla_\sigma R_{\tau\rho j}{}^{i}+\nabla_\tau R_{\rho\sigma j}{}^{i}=0 \qquad (8.1)$$

推导出来的結果（此处 ρ，σ，τ 是互异的，∇ 是协变导数的記号）。这个等式对于任何坐标都成立，所以使

$$[\rho,\ \sigma\tau]:\ [1,23],\ [2,31],\ [3,12]$$

和前記 (i) 系的

$$(i,\ i):\ (1,1),\ (2,2),\ (3,3)$$

相对应时，就可将

$$R_{23j}{}^{i},\ R_{31j}{}^{i},\ R_{12j}{}^{i}$$

看作一个向量的三个分量而記为 $\boldsymbol{R}$：R^1，R^2，R^3；于是无散度条件

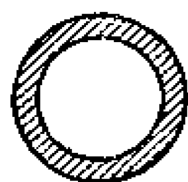
$$\operatorname{div}\boldsymbol{R}\triangleq\frac{\partial R^1}{\partial x^1}+\frac{\partial R^2}{\partial x^2}+\frac{\partial R^3}{\partial x^3}=0$$

就变为連續条件了。

§9 大域的不协調

实际上，具有不协調度的彈性体都可用燒嵌及焊接或其他热处理方法作成，于是热彈性論就成为不协調度論的应用部門。

燒嵌这种热处理方法，进一步提供了理論的端緒。将图 9.1 (*a*)那样的环形燒嵌在(*b*)那样的心子上，只有当(*a*)与(*b*)的温度不同时才可以接合起来，若是温度平均，則不是接合得太慢，就是接合得太坚固。前者离开了間隙而破坏了拓扑联結性，后者殘留下固有应力，也就是說此时由于温度这个参数的影响呈現出突出到三維平坦空間以外的情况。这种突出的样式改变了到环中心的距离，也就是将平圓板变形成类似圓錐(图 9.2)那样的东西。若将它再压回到平坦空間里去时，就有了固有应力。而圓錐及圓柱都是所謂可展曲面，內蘊地是平坦的，亦即将它們看作二維 Riemann 空間而作成 Riemann-Christoffel 曲率張量时必然得到一个零張量。但如果将它們保持着长度而展开在平面上时，在某一处将它們切开后就得到扇形[图 9.3(*a*)]或矩形[9.3(*b*)]。


(*a*)

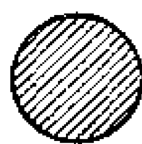

(*b*)

图 9.1



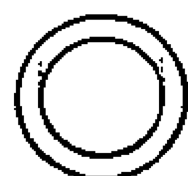


图 9.2

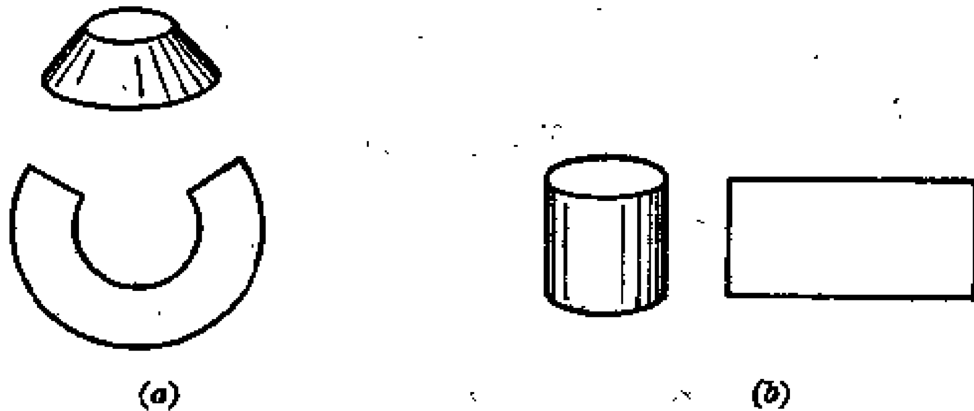
由此可知，协調条件

$$R_{lkj}{}^{i}=0$$

仅仅是在小域中沒有固有应变的条件，它对于研究大域不协調論是不充分的(特别在出現多重連通的情形)。

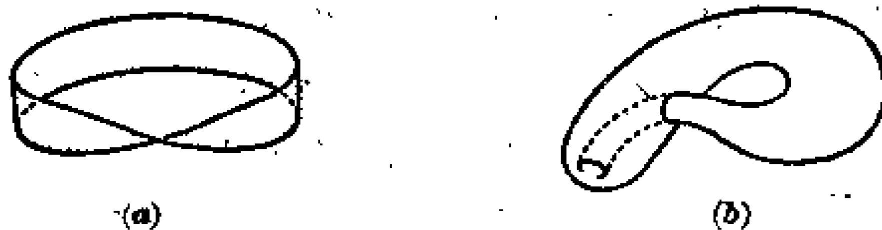
大域不协調性可用代数拓扑的 Betti 数及撓率数表示出来。由微分几何的观点看来，它应該包括在 Cartan 的非完整群的理論內[12]。作为撓率数的

例子，可举 Möbius 带和 Klein 瓶，如图 9.4 的 (a) 及 (b)。但在結晶里这种状态很少出現，所以結晶学家将它們看作是病态的，而不予考慮。



(a) (b)

图 9.3



(a) (b)

图 9.4

第 3 章将叙述的屈服条件，在本质上也要求大域观点，在导出屈服条件时所用的思考方法，其要点就在于此。但是在屈服塑性論里出現的度量，与其說是自然度量，不如說是現实空間里发生的非 Euclid 度量，曲率也是現实发生的。在另一方面，不协調論里出現的 Riemann 状态是以假想操作"解放"为前提才能引导进来，这一点必須注意。

第3章 塑性力学

§10 由平板压屈理論到屈服理論的类推

n 維 Riemann 空間的各部分，都可安装在維度等于其对称基本推量 $g_{\kappa\lambda}$ $(ds^2=g_{\kappa\lambda}dx^\kappa dx^\lambda)$ 的独立分量个数 $\left(=\frac{1}{2}n(n+1)\right)$ 的 Euclid 空間里，恰好象将曲面安装在三維 Euclid 空間一样。所以可仿照平面及曲面形物体与普通空間的关系来类推。

将彈性平板的側边支持起来，使边綫不能作垂直于板面的运动，但可自由旋轉。在这样的条件下施加平面内压力(图10.1)时，最初平板保持着平面的形状間仅作收縮，但达到由板的厚度、形状、大小以及物质彈性所确定的一定荷載时，就开始按照面 10.2 那样凸起来，这个現象就是所謂薄平板的压屈。凸出后的形状通常是不可展曲面，亦卽一般的二維 Riemann 空間。所以平板的压屈就是受有平間内荷載的(彈性)薄板作为二維平坦空間而能保持稳定的临界現象。

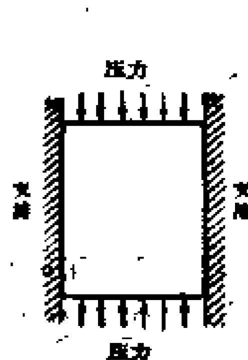


图 10.1



图 10.2

照这样給三維平坦物质流形加上始終在三維平坦空間内的力学荷載时，考虑是否能引起类似現象。也就是說，使荷載增加到引起某种临界値的情形，是否会发生不能作为三推平坦流形而保持稳定的情况？薄平板可看作二維的，超过临界点时它就向三維空間弯曲伸展进去，这是对的。但三推平坦物体能够弯曲而伸展进

去的四、五……等高維平坦空間在現实界是不存在的，所以在連續情况下，那种迁移是不可能发生的，只有在物体內部的联結里起了变化，在某些地方将有可能发生滑脫或皴析。这个情况恰好和将球面等不可展曲面硬压到平面上去时，在某些地方引起破綻的情况相仿。

在另一方面，作为实驗事实，当軟鋼在屈服时，其碎片間所发生的滑錯是众所周知的。此时若将荷載与平均应变的关系加以实測，作出如图 10.3 那样的拉伸图。軟鋼拉伸試載曲綫图 (*a*) 非常类似于平板压縮曲綫图 (*b*)。容易看出，屈服就是压屈的三維类比，不难想象，压屈点和屈服点是相互对应的。

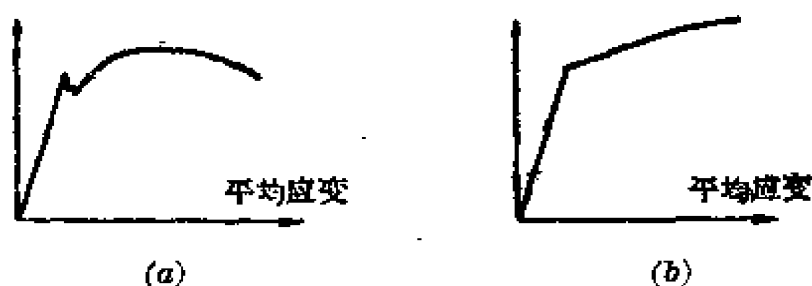


图 10.3

現实界里并不存在彎曲着的三維物质 Riemann（或非 Riemann）空間，也沒有包含它們的高維 Euclid 空間。将实际上由滑錯而失調了的軟鋼碎片与数学概念結合起来，載得到三維非平坦流形，再假定包圍着它的高維 Euclid 空間，便有可能討論包圍空間与子空間的相对关系，特别是相对曲率。关于压屈方面，将弯曲后所得到的曲面的法曲率，和板的弯矩，扭矩等的关系相比較，从而建立的彈性力学理論已經广泛地展开，所以仿照这种理論，将三維子空間对于包圍空間的相对曲率賦以物理意义，再导入对于它的抵抗而作成屈服临界的理論，我想这是可能的。

这样，关于物质材料的屈服也可以解析地整理成对于某种偏微分方程及边界条件的特征值問題，这已經有了希望。

§11 Euler-Schouten 曲率

我們用結晶学的語言說"在大域內完全沒有缺陷",就意味着:將物质流形安裝在任何高維 Euclid 空間內时,也都是相对平坦子空間,卽相对曲率为零。

設包圍空間的直交坐标是

$$X^{\alpha} \quad (\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ N),$$

將它对子空間的坐标

$$x^{\varkappa} \quad (\varkappa=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

取协变导数,得

$$H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\alpha} \overset{\mathrm{d}}{=} \nabla_{\mu}\nabla_{\lambda}X^{\alpha}. \tag{11.1}$$

(11.1)表示后者对于前者的相对曲率,叫作 Euler-Schouten 曲率張量,它对于上标 α 是包圍空間里的向量,对于下标 λ 及 μ 是子空間里的二阶張量。若到处都有

$$H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\alpha}=0 \tag{11.2}$$

时,这便是該子空間的測地綫(最短路綫)同时都成为包圍空間的測地綫的充要条件(証明从略)。这样的子空間叫作"全測地流形"。

但 Euclid 空間的全測地流形在大域內也完全是平坦子空間,所以(11.2)叫作"平坦条件"。

在另一方面,安裝在 N 維 Euclid 空間里的 Riemann 空間,它的 Riemann-Christoffel 曲率張量的协变分量可表示为

$$\begin{aligned} R_{\nu\mu\lambda\varkappa} &= \sum_{\alpha=1}^{N} H_{[\mu|\varkappa}^{\cdot\cdot\alpha} H_{\nu]\lambda}^{\cdot\cdot\alpha} \\ &\overset{\mathrm{d}}{=} \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}\left(H_{\mu\varkappa}^{\cdot\cdot\alpha}H_{\nu\lambda}^{\cdot\cdot\alpha}-H_{\nu\varkappa}^{\cdot\cdot\alpha}H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\alpha}\right) \end{aligned}$$

(証明从略)。由此可知:

(i) Riemann-Christoffel 曲率不为零时,必有不为零的 Euler-Schouten 曲率;

(ii) 即使 Riemann–Christoffel 曲率为零，Euler–Schouten 曲率也可以不为零。

所以由 Riemann–Christoffel 曲率为零所不能确保的协調性，或者大域的完全性，恒可作为 Euler–Schouten 曲率为零这个条件来掌握，而它将使各种規模的曲率消失一事，用协变微分方程的形状来給以确实保証。

这样，在§3的錯位或捩率張量之外，再考慮到当作 Euler–Schouten 曲率而表示的缺陷，这才能够将結晶力学的不完全性用微分方法来完全搞清楚。

在这种思考方法里，将錯位与度量缺陷各别地而又重迭地作了比較（参照次节），所以在本节內討論了将无捩率的 Riemann 空間安装在 Euclid 空間里的問題。对此还不够清楚的讀者，可直接参考文献[13]及[14]，其中有較詳細的研究。前者尽量作常識的說明，后者却用非完整空間图象論述統一的一般理論。从这些結果看来，$H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\alpha}$ 虽非錯位本身，而却代表錯位对周圍所发生的彈性場的不协調性，間接地支配着錯位的行动。又在文献[14]里，在力学观点以外，采取了自然地引进更接近于物理的缺陷的观点。

§12 塑性变形能

和彈性变形是保持拓扑的变形相反，伴有联結关系变化的变形叫作塑性变形，它在我們的数学理論里，可用前述二种不完全性 $Z_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa'}$ 及 $H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\alpha}$ 的发生、消灭、增减及移动表示出来。所以在塑性变形过程里所消耗的能应該是 $H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa}$ 及 $Z_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa'}$ 的数量函数。将每单位体积的能写为

$$u=u(H_A, Z_A),$$

其中 $$H_A=H_{ji}^{\cdot\cdot\alpha},\quad Z_A=Z_{ji}^{\cdot\cdot\kappa'}=-S_{ji}^{\cdot\cdot\kappa},$$

且(i)是直交坐标。

相伴于塑性应变的微小变化

$$\delta H_A,\quad \delta Z_A,$$

每一单位体积消耗的能量为

$$\delta u = G^A \delta H_A + T^A \delta Z_A,$$

但 $$(G_\alpha^{\cdot ij} =) G^A = \frac{\partial u}{\partial H_A}, \quad (T_\varkappa^{\cdot ij} =) T^A = \frac{\partial u}{\partial Z_A}$$

是表示对抗塑性变形的物理作用的張量。

塑性变化是不可逆的，表面上見到的能量消失恒是正的，所以将塑性能函数按 H_A 及 Z_A 的冪級数展开时，除去常数项外可假定自二次项

$$\frac{1}{2}\bar{B}^{AB} H_B H_A + \bar{L}^{AA} H_A Z_A + \frac{1}{2}\bar{J}^{AM} Z_M Z_A$$

开始。在此 $\bar{B}^{AB}$, $\bar{L}^{AA}$, $\bar{J}^{AM}$ 是物性常数，它們是否能随着温度及最初錯位密度的不同而改变，現尚未确定。通常設为

$$B^{AB}(H, Z) = \frac{\partial^2 u}{\partial H_B \partial H_A},$$

$$L^{AA}(H, Z) = \frac{\partial^2 u}{\partial H_A \partial Z_A},$$

$$J^{AM}(H, Z) = \frac{\partial^2 u}{\partial Z_M \partial Z_A},$$

则 $$B^{AB}(0, 0) = \bar{B}^{AB}, \quad L^{AA}(0, 0) = \bar{L}^{AA}, \quad J^{AM}(0, 0) = \bar{J}^{AM},$$

$$\delta G^A = B^{AB}\delta H_B + L^{AA}\delta Z_A, \quad \delta T^A = L^{AA}\delta H_A + J^{AM}\delta Z_M.$$

应变 H_A 对于 X^α 的絕对导数由 (11.1) 所定义。特别当应变微小时，由平坦状态的变位

$$X^\alpha = w^\alpha$$

可表示为

$$H_{ij}^{\cdot\cdot\alpha} \overset{(i)}{=} \frac{\partial^2 w^\alpha}{\partial x^j \partial x^i}.$$

此时仅生有普通意义的应变

$$\tilde{\omega}_{ji} = \frac{1}{2}\frac{\partial w^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial w^\alpha}{\partial x^i}.$$

另一方面，由 $(-Z_{ji}^{\cdot\cdot\varkappa} =)\,\Omega_{ji}^{\varkappa}$ 的式子可立即看出，Z_A 仅和

$$A_i^{\varkappa'}=\delta_i^{\varkappa'}+\pi_i^{\varkappa'}$$

($\delta_i^{\varkappa'}$ 是 Kronecker δ)的第二项所定向量

$$\pi^{\varkappa'}=\text{grad } \varphi^{\varkappa'}+\text{rot } \boldsymbol{b}^{\varkappa'}$$

的旋轉部分

$$\mathbf{c}^{\varkappa'}=\text{rot } \boldsymbol{b}^{\varkappa'}$$

有关，卽是

$$\Omega_{\mu'\lambda'}^{\varkappa'}=A_{\mu'}^{j}A_{\lambda'}^{i}\frac{\partial c_{ij}^{\varkappa'}}{\partial x^{ij}}.$$

$\pi_{\lambda'}^{\varkappa'}=\pi_i^{\varkappa'}A_{\lambda'}^i$ 是伴随錯位而发生的普通意义的应变。 最后，普通意义的应力 σ^{ij} 或 $\sigma_{\cdot\lambda'}^{\varkappa'}=\sigma_{\cdot\lambda'}^{i}A_i^{\varkappa}$ 所作的彈性功是

$$\delta v=\sigma^{ij}\delta\,\widetilde{\omega}_{ji}+\sigma_{\cdot\lambda'}^{i}\delta\pi_i^{\varkappa'}.$$

于是試件全体的能量变化为

$$\delta U+\delta V=\iiint(\delta u+\delta v)\,dX$$

$$=\iiint(G^A\,\delta H_A+T^A\,\delta Z_A+\sigma^{ij}\,\delta\widetilde{\omega}_{ji}+\sigma_{\cdot\varkappa'}^{i}\,\delta\pi_i^{\varkappa'})\,dX,$$

但 $dX=dx^1\,dx^2\,dx^3$,

而且体积分是就試件全体計算的。在此，塑性变形上所消耗的包括

(1) 热量或者变为界面能而表面上看来似乎已失掉了的（不可逆）部分

及 δU

(2) 由彈性場放出且本来是可逆的能量 $-\delta V$。

全体上是相等的这个条件

$$\delta U=-\delta V \tag{12.1}$$

成立时，这种塑性现象是可以实现的。(12.1)变为

$$\iiint(G^A\,\delta H_A+T^A\,\delta Z_A+\bar{\sigma}^{ij}\,\widetilde{\omega}_{ji}+\bar{\sigma}_{\cdot\varkappa'}^{i}\,\delta\pi_i^{\varkappa'})\,dX=0. \tag{12.2}$$

在此已將微小量且由积分消去的不必要部分都已略去，又将 σ^{ij}, $\sigma_{\cdot\varkappa'}^{i}$ 分别用平均应力 $\bar{\sigma}^{ij}$, $\bar{\sigma}_{\cdot\varkappa'}^{i}$ 代换了。

§13 場的方程与边界条件

以下专討論离开平坦（完全）状态的微小变位[1]，这样只需将 X^{α} 及 $\pi_{i}^{\varkappa'}$ 各代以

$$w^{\alpha}=\delta X^{\alpha},\quad \theta_{i}^{\varkappa'}=\delta\pi_{i}^{\varkappa'}$$

就够了。能的平衡条件(12.2)变为

$$\iiint(G_{\alpha}^{\cdot ij}\partial_{j}\partial_{i}w^{\alpha}+T_{\varkappa'}^{\cdot[ij]}\partial_{[j}\theta_{i]}^{\varkappa'}+\bar{\sigma}^{ij}\partial_{j}w^{\alpha}\partial_{i}w_{\alpha}+\bar{\sigma}_{\cdot\varkappa'}^{i}\theta_{i}^{\varkappa'})dX=0.$$

将所有的量都看作普通三維的向量或張量，作两次分部积分，就得到

$$\oiint[G_{\alpha}^{\cdot ij}\partial_{i}w^{\alpha}+\bar{\sigma}^{ji}\partial_{i}w^{\alpha}+T_{\varkappa'}^{\cdot[ij]}\theta_{i}^{\varkappa'}](dS)_{j}$$

$$+\iiint\{w^{\alpha}[\partial_{j}\partial_{i}G_{\alpha}^{\cdot ij}-\partial_{j}(\bar{\sigma}^{ji}\partial_{i}w^{\alpha})]+\theta_{i}^{\varkappa'}(-\partial_{j}T_{\varkappa'}^{\cdot[ij]}$$
$$+\bar{\sigma}_{\cdot\varkappa'}^{i})\}dX=0.$$

$\oiint$ 表示对試件表面全体所作的面积分。这个二重积分及三重积分都分别为零，所以由前者得到边界条件

$$\oiint[G_{\alpha}^{\cdot ij}\partial_{i}w^{\alpha}+\bar{\sigma}^{ji}\partial_{i}w^{\alpha}+T_{\varkappa'}^{\cdot[ij]}\theta_{i}^{\varkappa'}](dS)_{j}=0;\tag{13.1}$$

由后者将 w^{α} 及 $\theta_{i}^{\varkappa'}$ 看作独立的量，使其系数分别为零，得

$$\partial_{j}\partial_{i}G_{\alpha}^{\cdot ij}-\partial_{j}(\bar{\sigma}^{ji}\partial_{i}w^{\alpha})=0,\tag{13.2}$$

$$\partial_{j}T_{\varkappa'}^{\cdot ij}=\bar{\sigma}_{\cdot\varkappa'}^{i}.\tag{13.3}$$

(13.2)是支配着試件内力学平衡的場的方程。边界条件(13.1)可作如下改变。

通常，对于任意数量 w 及任意張量 $G^{\varkappa\lambda}$ 成立着关系式

$$\oiint\frac{\partial w}{\partial x^{\varkappa}}G^{\varkappa\lambda}(dS)_{\lambda}=I+\oiint\frac{\partial w}{\partial x^{(3)}}G^{(3)\lambda}(dS)_{\lambda},$$

---

[1] 即使有均匀錯位分布时，在宏观統計的意义下也是平坦的。

$$I=\oint_{\Gamma} w(G^{(1)(3)}\varphi)\,dx^{(2)}+\oint_{\Gamma} w(G^{(2)(3)}\varphi)\,dx^{(1)}$$

$$-\iint \frac{w}{\varphi}\left\{\frac{\partial(G^{(1)\lambda}\varphi)}{\partial x^{(1)}}+\frac{\partial(G^{(2)\lambda}\varphi)}{\partial x^{(2)}}\right\}(dS)_{\lambda},$$

$$\varphi=\frac{(dS)_{(3)}}{dx^{(1)}dx^{(2)}},$$

Γ 表示表面 $S(x^{(3)}=$常数) 的边界曲綫。可以考虑三种可能情形:

(i) S 是閉曲面, Γ 是零閉曲綫;

(ii) 試件固定,从而 Γ 上无应变;

(iii) 无限长的。

在(i)时曲綫积分消失;在(ii)里对于 Γ 的点,

$$w=0; \tag{13.4}$$

在 (iii) 里由于应变在远处不能无限地增加这个显然的条件,所以无限远处的 w 的分布不是均匀的 ($w=0$) 便是周期的。若是周期的,将 w 的节綫取作 Γ,仍然可以假定(13.4)。最后,在所有情形下都有

$$\oint_{\Gamma} w\varphi(G^{(1)(3)}dx^{(2)}+G^{(2)(3)}dx^{(1)})=0,$$

于是得

$$I=-\iint \frac{w}{\varphi}\left\{\frac{\partial(G^{1(\nu)}\varphi)}{\partial x^{1}}+\frac{\partial(G^{2(\nu)}\varphi)}{\partial x^{2}}\right\}(dS)_{(\nu)},$$

在此 x^1 及 x^2 是直交坐标 $x^i\,(i=1,2)$, (ν) 表示 S 面法綫方向不作总和。

将以上結果应用于(13.1)的 w^α 及 $G_\alpha^{\cdot ij}$,则得

$$\iint\left\{\frac{\partial w^{\alpha}}{\partial x^{(\nu)}}G^{\cdot(\nu)(\nu)}+w^{\alpha}\left(\frac{1}{\varphi}\left[\frac{\partial(G_{\alpha}^{\cdot 1(\nu)}\varphi)}{\partial x^{1}}+\frac{\partial(G_{\alpha}^{\cdot 2(\nu)}\varphi)}{\partial x^{2}}\right]\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\partial G_{\alpha}^{\cdot(\nu)k}}{\partial x^{k}}-\frac{\partial w_{\alpha}}{\partial x^{i}}\sigma^{i(\nu)}\right)+\theta_{1}^{\varkappa'}T_{\varkappa'}^{\cdot 1(\nu)}+\theta_{2}^{\varkappa'}T_{\varkappa'}^{\cdot 2(\nu)}$$

$$\left.+\theta_{(\nu)}^{\varkappa'}T_{\varkappa'}^{\cdot(\nu)(\nu)}\right\}(dS)_{(\nu)}=0. \tag{13.5}$$

在此，各种边界条件中实际上得以出现的是自由表面，就是試件表面，即(13.5)的

$$w^{\alpha},\quad \frac{\partial w^{\alpha}}{\partial x^{(\nu)}},\quad \theta_{i}^{\varkappa'}$$

互相綫性独立而不受任何限制。所以使其系数分别等于零，则得

$$\left.\begin{aligned}-\frac{1}{\varphi}\left[\frac{\partial(G_{\alpha}^{\cdot 1(\nu)}\varphi)}{\partial x^{1}}+\frac{\partial(G_{\alpha}^{\cdot 2(\nu)}\varphi)}{\partial x^{2}}\right]-\frac{\partial G_{\alpha}^{\cdot(\nu)k}}{\partial x^{k}}&\\ +\frac{\partial w_{\alpha}}{\partial x^{k}}\,\sigma^{k(\nu)}=0,&\\ G^{(\nu)(\nu)}=0,&\end{aligned}\right\}\qquad(13.6)$$

及

$$T_{\varkappa'}^{\cdot i(\nu)}=0.\qquad(13.7)$$

§14 屈服条件

基础条件式可区分为两组，其一是关于对称張量 $G_{\alpha}^{\cdot ij}$ 的一組(13.2)及(13.6)，即

$$\left.\begin{aligned}&\overline{B}_{\alpha\cdot\cdot\beta}^{\cdot ij\cdot kl}\partial_{l}\partial_{k}\partial_{j}\partial_{i}w^{\beta}-\overline{\sigma}^{ij}\partial_{j}\partial_{i}w_{\alpha}=-\overline{L}_{\varkappa'\cdot\cdot\alpha}^{\cdot ij\cdot kl}\partial_{l}\partial_{k}\partial_{j}\theta_{i}^{\varkappa'},\\ &\partial_{i}(\overline{B}_{\alpha\cdot\cdot\beta}^{\cdot(\nu)i\cdot lk}\partial_{k}\partial_{l}w^{\beta})+\{\partial_{1}(\overline{B}_{\alpha\cdot\cdot\beta}^{\cdot 1(\nu)\cdot ij}\varphi\partial_{j}\partial_{i}w^{\beta})\\ &\qquad+\partial_{2}(\overline{B}_{\alpha\cdot\cdot\beta}^{\cdot 2(\nu)\cdot ij}\varphi\,\partial_{j}\partial_{i}w^{\beta})\}/\varphi-\overline{\sigma}^{i(\nu)}\partial_{i}w_{\alpha}\\ &\quad=-\partial_{i}(\overline{L}_{\varkappa'\cdot\cdot\alpha}^{\cdot jk\cdot(\nu)i}\partial_{k}\theta_{j}^{\varkappa'})-\{\partial_{1}(\overline{L}_{\varkappa'\cdot\cdot\alpha}^{\cdot ij\cdot 1(\nu)}\varphi\partial_{j}\theta_{i}^{\varkappa'})\\ &\qquad+\partial_{2}(\overline{L}_{\varkappa'\cdot\cdot\alpha}^{\cdot ij\cdot 2(\nu)}\varphi\,\partial_{j}\theta_{i}^{\varkappa'})\}/\varphi,\\ &\overline{B}_{\alpha\cdot\cdot\beta}^{\cdot(\nu)(\nu)\cdot ij}\partial_{j}\partial_{i}w^{\beta}=-\overline{L}_{\varkappa'\cdot\cdot\alpha}^{\cdot ij\cdot(\nu)(\nu)}\partial_{j}\theta_{i}^{\varkappa'}.\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{I})^{❶}$$

其另一是关于 w 反对称的張量 $T_{\varkappa'}^{\cdot[ij]}$ 的一組(13.3)及(13.7)，即

$$\left.\begin{aligned}&\overline{L}_{\varkappa'\cdot\cdot\alpha}^{\cdot i(\nu)\cdot kl}\partial_{l}\partial_{k}\partial_{j}w^{\alpha}=\overline{\sigma}_{\cdot\varkappa'}^{j}+\overline{E}_{\cdot\cdot\lambda'\varkappa'}^{ij}\theta_{j}^{\lambda'}-\overline{J}_{\varkappa'\cdot\cdot\lambda'}^{\cdot i(\nu)\cdot kl}\partial_{j}\partial_{l}\theta_{k}^{\lambda'},\\ &\overline{L}_{\varkappa'\cdot\cdot\alpha}^{\cdot i(\nu)\cdot kl}\partial_{l}\partial_{k}w^{\alpha}=-\overline{J}_{\varkappa'\cdot\cdot\lambda'}^{\cdot i(\nu)\cdot kl}\partial_{l}\theta_{k}^{\lambda'}.\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{II})$$

式中 $\overline{E}_{\cdot\cdot\lambda'\varkappa'}^{ij}$ 是平均弹性常数。

将(I)及(II)看作关于 w^{α} 及 $\theta_{i}^{\varkappa'}$ 的一次方程組，从它的一般解

---

❶ 考虑到平均应力的靜力平衡 $\partial_{j}\overline{\sigma}^{ij}=0$。

减去与非齐次项 $\bar{\sigma}^{i}_{\cdot\varkappa'}$ 成比例的项后，所得的式子就是去掉 $\bar{\sigma}^{i}_{\cdot\varkappa'}$ 项而得的齐次系(場的方程与边界条件)的解。齐次方程組的系数間可以存在着一些固有条件，这是众所周知的。在此也应該有包含 $\bar{\sigma}^{ij}$ 及 w 与物性常数的特有条件，这个条件就是屈服及滑錯的条件。

为了更好地理解发生特有条件的情况，我們来考察沒有数量場及旋轉場干涉的情形，卽

$$\bar{L}^{\cdot ij\cdot kl}_{\varkappa'\cdot\cdot\alpha}=0$$

的情形。此时第一組

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{B}^{ijkl}\frac{\partial^4 w}{\partial x^l\partial x^k\partial x^j\partial x^i}-\bar{\sigma}^{ij}\frac{\partial^2 w}{\partial x^j\partial x^i}=0,\\
&\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\bar{B}^{(\nu)ijk}\frac{\partial^2 w}{\partial x^k\partial x^j}\right)+\frac{1}{\varphi}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\bar{B}^{1(\nu)ij}\varphi\frac{\partial^2 w}{\partial x^j\partial x^i}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\bar{B}^{2(\nu)ij}\varphi\frac{\partial^2 w}{\partial x^j\partial x^i}\right)\right\}=\bar{\sigma}^{i(\nu)}\frac{\partial w}{\partial x^i},\\
&\bar{B}^{(\nu)(\nu)ij}\frac{\partial^2 w}{\partial x^j\partial x^i}=0
\end{aligned}\right\}\quad(\text{I-b})❶$$

与第二組

$$\left.\begin{aligned}
&J^{\cdot ij\cdot\cdot kl}_{\varkappa'\cdot\cdot\lambda'}\partial_j\partial_l\theta^{\lambda'}_k-\bar{E}^{ik}_{\cdot\cdot\lambda'k'}=\bar{\sigma}^{i}_{\cdot\varkappa'},\\
&\bar{J}^{\cdot i(\nu)\cdot kl}_{\varkappa'\cdot\cdot\lambda'}\partial_l\theta^{\lambda'}_k=0
\end{aligned}\right\}\qquad(\text{II}')$$

是完全分离的，仅由（I-b）指定了应力的特有条件。另一方面，（II'）的齐次部分不含应力，由此虽然也能指定特有条件，但只能是对物性常数 $J^{\cdot ij\cdot\cdot kl}_{\varkappa'\cdot\cdot\lambda'}$ 等加上的制限。总之，旋轉場的直接临界迁移不是由屈服那样的力学现象引起的，而可想象为由类似于融点或相的迁移等物理性质的临界现象所引起。

§15 各向同性

物性常数張量随着材料的方向特性，特别是結晶系的种类，显

❶ 在此省略了标数 α, β.

然具有类似于彈性常数張量的对称性构造。考虑到各結晶系的对称性，用結晶彈性論中同样的运算方法，不难指出它的独立分量。在最簡单的各向同性的情形，对于 i 及 j，k 及 l 与 (ij) 及 (kl) 对称的張量 $\bar{B}^{ijkl}$，和彈性常数的情形同样可归結到二个常数。若取 $i=1, 2, 3$ 为主軸方向，则有

$$G^{11}=B[H_{11}+\varkappa(H_{22}+H_{33})],$$
$$G^{22}=B[H_{22}+\varkappa(H_{33}+H_{11})],$$
$$G^{33}=B[H_{33}+\varkappa(H_{11}+H_{22})],$$

但
$$H_{ji}=H_{ji}^{\cdot\cdot\alpha}{}_{\alpha}, \quad G^{ij}=G_{\alpha}^{\cdot ij}.$$

純数量場方程变为

$$B\Delta\Delta w-\sigma^{ij}\frac{\partial^2 w}{\partial x^j\partial x^i}=0, \tag{15.1}$$

自由边界条件变为

$$\left.\begin{aligned}&(1+\varkappa)\,B\frac{\partial^2 w}{\partial\nu^2}-\varkappa B\Delta w=0,\\&(2+\varkappa)B\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta w-(1+\varkappa)B\frac{\partial^3 w}{\partial\nu^3}-\sigma_{\nu}^{\cdot i}\frac{\partial w}{\partial x^i}=0.\end{aligned}\right\}\tag{15.2}$$

Δ 是 Laplace 算子，$\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ 表示在边界法綫方向的偏导数运算，$\sigma_{\nu}^{\cdot i}$ 是相应的应力張量分量。

通常处理复晶体，例如軟鋼等的宏观各向同性时，利用(15.1)及(15.2)等形状的方程来論述它的屈服条件，这是应該作得到的。直到現在为止，以下各种情形

（i） 均匀应力，

（ii） 梁的弯曲及(中空的)棒的扭轉等綫性应力分布，

（iii） 受油压等各向同性应力

都已經作过分析[6][7]。实际分析时还需考虑种种附带条件，将上面基本式不够的地方随时加以补充才可进行工作。在具体的結果里

边，我們仅提一下对于(i)已得到和"最大剪切应力説"一致的結果，其他的就不再說了。

参考书及文献

文　献

[1] J. M. Burgers: Some Considerations on the Fields of Stress connected in a Regular Crystal Lattice, I, II. Proc. Koninklijke Nederlandse Academie von Wetenschappen, **42** (1939), 293, 378.

[2] B. A. Bilby, R. Bullough & E. Smith: Continuous Distribution of Dislocations: A New Application of the Method of Non-Riemannian Geometry, Proc. Roy. Soc. (A), **231**, 1185 (1955), 263.

[3] E. Kröner: Die Versetzung als elementare Eigenspannungsquelles, Zeitschrift für Naturforschung, **11a**, **12** (1956), 969.

[4] K. Kondo: A Proposal of a New Theory concerning the Yielding of Materials based on Riemannian Geometry, I, II. Journ. Jap. Soc. Appl. Mech., **2**, **11**, **12** (1949), 123, 146.

[5] K. Kondo: On the Fundamental Equations of the Theory of Yielding, Journ. Jap. Soc. Appl. Mech., **3**, **20** (1950), 184.

[6] K. Kondo: The Mathematical Analysis of Yield Points. I, II, III. Journ. Jap. Soc. Appl. Mech., **3**, **20** (1950), 188; **4**, **21**, **20** (1951) 5, 35.

[7] K. Kondo: Mathematical Analysis of Yield Points of an Isotropic Material., Memoirs, I, Div. D (1956), 495.

[8] K. Kondo: On the Geometrical and Physical Foundations of the Theory of Yielding, Proc. 2nd. Jap. Nat. Congr. Appl. Mech., (1953), 41.

[9] K. Kondo: Non-Riemannian Geometry of Imperfect Crystals from a Macroscopic Viewpoint, Memoirs, I, Div. D (1955), 498.

[10] 森口繁一：弾性体のケイチガイの基本理論，应用数学力学，I, 1 (1947), 29.

[11] K. Kondo: Geometry of Elastic Deformation and Incompatibility, Memoirs, **1**, Div. C (1955), 361.

[12] É. Cartan: Les groups d'holonomie des espaces généralisées, Acta Math., **48** (1926), 1.

[13] K. Kondo: On the Fundamental Equations of the Macroscopic Mechanical Behaviour of Microscopically Non-Uniform Materials, Memoirs, **1**, Div. D (1955), 470.

[14] K. Kondo: Non-Holonomic Foundations of the Theory of Plasticity and Yielding, Memoirs, **1**, Div. D (1955), 522.

参 考 书

关于几何学及其一般应用，参看本丛书矢野健太郎的《几何学》。此外还可参照：

[15] J. A. Schouten u. D. J. Struik: Einführung in die neuern Methoden der Differentialgeometrie I, II (Nordhoff, Groningen-Batavia 1935, 1938).

[16] J. A. Schouten: Tensor Analysis for Physicists (Oxford Clarendon Press, 1951).

[17] J. A. Schouten: Ricci Calculus (Springer, Berlin, 1954).

[18] 矢野健太郎: 接続の几何学(河出书房，东京，1947).

关于弹性論錯位論方面，除去普通常見的书籍外，还有：

[19] 小谷正雄: 連續物体の力学 I (岩波讲座物理学，东京，1934).

[20] F. D. Murnaghan: Finite Deformation of an Elastic Solid (John Wiley, N. Y.). 1951.

[21] 桥口隆吉: 結晶轉位論(岩波讲座现代物理学，东京，1955).

校后記

錢嶠壮

1951年以来，日本的一些工程技术人員研究了几何学在工程技术方面的应用，特别是拓扑学在网絡理論上的应用以及黎曼几何和非黎曼几何在电机、彈性力学、塑性力学、固体物理学等方面的应用，并把所获得的成果編成了"汇刊"。这本小册子中所收集的两篇文章都是和上述研究工作有关的。第一篇是山本善之著的有限变位彈性論，是用張量的方法来讲述的。第1章叙述变形的基本性质与平衡条件，它的特点是：并用了拉格兰日方法与欧拉方法的同时，解釋了(L)系及(E)系的物理意义和几何意义，从此导出两种坐标系的綫素、面素与体素公式，而且建立彈性体的平衡方程。是后，对微小应变的理論作了較詳尽的介紹。

第2章讲彈性体力学。先由彈性能出发，导出应力应变的基本关系与虎克定律，并証明对于微小应变一般成立着虎克定律；从此可以簡捷地得出彈性势。在本章中为了討論殘余应力和协調条件，著者把协調条件表成黎曼張量的消失，借以沟通几何学与彈性力学的关系，这是值得注意的。关于平衡的几个定理及平衡的稳定性与对微小变位解的唯一性的研究，也写得很簡洁。

第3章讲平板，把上述理論应用到二維的情形并且对矩形板的特征值問題作出了具体的解答。

总之，第一篇作为一般彈性力学理論基础的讀物是具有較好内容的，但是由于篇幅較少，对一些重要問題如关于彈性力学基本方程的求解問題等沒有进行討論。

第二篇是近藤一夫著的变形几何学。作者把他自己的研究成

果綜合而成，对一般的公式都沒有加以詳細推导，只对思想方法和一些結果作了介紹。为了便于讀者的閱讀，在这里做一些补充的解释。

如所熟悉，在固体物理学中把完全結晶看作連續体，或者把連續体看作完全結晶所充塡而成的欧氏空間，并且依照結晶格子的排列形状分为 32 种結晶族，相当于 230 种欧氏空間的运动群。但是，不完全結晶所充塡而成的連續体具有和完全結晶体不同的許多物理性質，那么应該如何理解不完全結晶所占的空間的几何性質呢？

为了解决这个問題，近藤一夫采用这样一种思考方法，即把不完全結晶中的完全結晶部分剪成碎片，并且把它們从不完全結晶中“解放”出来。假如碎片在原来不完全結晶內的綫素长度和方向都可用直角坐标的微分 $dx^{\varkappa}(\varkappa=1, 2, 3)$ 表示的話，那么可把剪下来的碎片按照本身的彈性性质恢复到自然状态。这样一来，它的綫素的长度和方向应該是可用另一坐标系的微分 $(dx)^{\varkappa'}(\varkappa'=1, 2, 3)$ 来表示的。由于封閉在不完全晶体內的情形是現实的，而剪下来的碎片是設想的，所以 $dx^{\varkappa}$ 是眞实的，从而称 $x^{\varkappa}$ 为眞坐标，記作 $(\varkappa)$。并称 $(dx)^{\varkappa'}$ 的相應坐标系 $(\varkappa')$ 为假坐标。这里假定存在綫性关系：$(dx)^{\varkappa'}=A^{\varkappa'}_{\varkappa}\,dx^{\varkappa}$，$dx^{\varkappa}=A^{\varkappa}_{\varkappa'}(dx)^{\varkappa'}$。而且 $A^{\varkappa'}_{\varkappa}$ 的非完整物

$$\Omega^{\varkappa'}_{\mu'\lambda'} \overset{\mathrm{d}}{=} A^{\mu}_{[\mu'} A^{\lambda}_{\lambda']} \frac{\partial A^{\varkappa'}_{\lambda}}{\partial x^{\mu}}$$

不都为零，这也就是說，不能从上列微分之面的綫性关系导出普通意义的坐标变换。

目前关于結晶学中的缺陷理論有很多研究；它是固体物理的重要組成部分。著者巧妙地把几何应用到这理論中来，闡明了錯位理論与非黎曼空間撓率張量之間的联系。他首先导出錯位張量与非完整物的基本关系式 $Z_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa'} \overset{*}{=} -\Omega^{\varkappa'}_{\mu'\lambda'}$，然后从几何学的观点研

究了 $(\varkappa')$ 系所对应的空間的拟平行性，并証明了一个重要的結果：如果 $(\varkappa')$ 系空間的仿射联絡是对称的，那末除去一个符号外錯位張量重合于空間的撓率張量。在三維情形里，錯位張量只有两种分类：$Z_{12}^{.\,.2}$ 和 $Z_{12}^{.\,.3}$，这些恰恰相当于固体物理中所熟悉的刃状錯位和螺状錯位。因此，从上述結果就导出了結晶学中布尔格斯所創議的理論的一个几何解釋。这里特别値得提出的是比尔白所引入的条件恰恰相当于仅有撓率而无曲率的絕对平行性空間的情况。

布尔格斯在結晶学中考慮过一种联結原子与原子間的綫路，称为布尔格斯回路，它是在不完全晶体中滿足下列两个条件的封閉曲綫：

（i）回路全部落在完全結晶的部分，而可能包圍着不完全結晶部分。

（ii）如果把不完全結晶同完全結晶对应起来，那末在完全結晶中原子間的相应的回路不一定是封閉的，其两端的差向量就是布尔格斯向量。著者利用布尔格斯回路引进第二种缺陷，即所謂度量缺陷，按照黎曼曲率張量作出表示，并把它解釋为大域的缺陷。对这种缺陷的发生原因，著者做了些物理方面的解釋。

在第2章中著者很自然地把黎曼曲率張量解釋为彈性体的不协調性。根据張量的性质还可以解釋不协調性的永恒和連續。

第3章叙述屈服理論，作为压屈理論的对比，并用張量积分导出塑性力学的基本方程。最后簡略提到等方向問題作为結束。

总之，把几何学应用于工程技术上是一个重要的課題。因此这本小册子是値得推荐的。

关于本篇的参考文献，讀者可参看近藤在上述“汇刊”中所載的几篇文章。